

瞬時リアプノフ指数による
非線形システムの減衰度推定と
その生体システムへの応用に関する研究

大分大学大学院工学研究科
博士後期課程
博士論文

2012年3月

十時 優介

目次

| | | |
|-------|-------------------------|----|
| 第1章 | 序論 | 1 |
| 1.1 | 研究の背景 | 1 |
| 1.2 | 従来の研究と課題 | 2 |
| 1.3 | 目的及び特徴 | 3 |
| 1.4 | 本論文の構成 | 3 |
| 第2章 | 瞬時リアプノフ指数について | 5 |
| 2.1 | はじめに | 5 |
| 2.2 | リアプノフ指数・有限時間リアプノフ指数 | 5 |
| 2.3 | 一般化リアプノフ指数 | 6 |
| 2.4 | Shin らの提案している ILE | 9 |
| 2.5 | 瞬時リアプノフ指数の定義 | 11 |
| 2.6 | 同期指標としての ILE の拡張 | 15 |
| 第3章 | 非線形システム減衰度判別への適用 | 19 |
| 3.1 | はじめに | 19 |
| 3.2 | 安定判別への適用 | 19 |
| 3.2.1 | 2次系のシステム | 19 |
| 3.2.2 | 初期値により有限発散時刻を持つシステム | 26 |
| 3.2.3 | ゼロを固有値に持つシステム | 33 |
| 3.2.4 | ダフィンシステム | 37 |
| 3.3 | Lorenz システムを用いた通信系の同期判定 | 44 |
| 3.3.1 | 通信モデルの記述 | 44 |
| 3.3.2 | 数値例 | 45 |
| 3.4 | まとめ | 55 |
| 第4章 | 生体システムの状態推定 | 61 |
| 4.1 | はじめに | 61 |

| | | |
|--------------|---|------------|
| 4.2 | HR ニューロンモデルへの適用 | 62 |
| 4.2.1 | ニューロンの活動について | 62 |
| 4.2.2 | 膵臓 β -細胞のバースティング:Hodgkin-Huxley モデル | 63 |
| 4.2.3 | 放物型バースティング | 66 |
| 4.2.4 | バースティング振動の分類スキーム | 66 |
| 4.2.5 | 細胞集団のバースティング | 66 |
| 4.2.6 | 定性的バースティングモデル:HR モデル | 67 |
| 4.2.7 | HR ニューラルネットワークにおけるバースティング | 69 |
| 4.2.8 | HR ニューロン単体モデル | 73 |
| 4.2.9 | HR ニューロンの動特性方程式とオブザーバの構成 | 73 |
| 4.2.10 | 数値例 | 76 |
| 4.3 | CAM 植物の体内リズムモデルへの適用 | 82 |
| 4.3.1 | 植物における光合成について | 82 |
| 4.3.2 | 最小 CAM モデル | 86 |
| 4.3.3 | 制御対象 | 96 |
| 4.3.4 | CAM モデルにおける Critical manifold | 99 |
| 4.3.5 | 液胞膜以外の内部状態を利用したオブザーバの構成 | 100 |
| 4.3.6 | 数値例 | 102 |
| 第 5 章 | 生体システムへの ILE 適用例 | 105 |
| 5.1 | はじめに | 105 |
| 5.1.1 | HR ニューロンモデルへの適用 | 105 |
| 5.1.2 | CAM 植物モデルへの適用例 | 120 |
| 5.2 | まとめ | 134 |
| 第 6 章 | 結論 | 138 |
| | 謝辞 | 140 |

第1章 序論

1.1 研究の背景

1980年代から制御工学の世界でも、線形制御だけではなく、非線形性の性質を積極的に取り入れる動きが活発になってきた。ただし、非線形システムを取り扱う場合でも、非線形システムを平衡点周りで局所的に線形近似したり、非線形項を相殺する非線形フィードバックによる厳密線形化などにより線形系に変換する方法が大半を占めている。これらは直接に非線形性の特徴を使っているとは言えず、本来の非線形性の特徴である創発現象や自己組織化現象などの機能を消し去っている面があった。このような機能を直接取り扱う非線形科学を複雑系の科学と呼び、特に、脳科学、生理学、生物学などで盛んに研究されている。最近、これらを制御理論に取り込む試みが行われているが、いまだ模索状態にあるとあって過言でない。その難しさの最大の原因は、安定性と平衡点の取り扱いにあると思われる。制御理論においては、単一の平衡点まわりの挙動を解析し、安定化を行うことを基本としている。ところが、非線形力学系においては、リミットサイクルや複数の平衡点における動的挙動（ヘテロクリニック軌道）がその性質を決定付けている。制御理論の場合には、非線形系の安定性はリアプノフの安定論をベースにしているが、これだけでは準安定な状態の挙動を明示することはできない。非線形力学系の解の長時間挙動解析には、リアプノフ指数が用いられている。リアプノフ指数は力学系においてごく接近した軌道が離れていく度合いを表す量であり、カオスの振る舞いを定量的に表す量として軌道の拡大率を表すリアプノフ指数が用いられる。これは各時刻における2つの軌道間の成長率として定義される。特に軌道間の成長率が指数関数 $e^{\lambda t}$ で表した場合、時係数 λ で与えられる。このためリアプノフ指数は exponential growth rate とも呼ばれている。またリアプノフ指数のうち最大のものを、最大リアプノフ指数といい、非線形システムの解（フロー）が遠ざかっていく速さのもっとも大きなものを代表している。この値が正であると、フローが現在の位置から離れていくことを意味しており、その位置が局所安定ではないことを物語っていると考えられている。リアプノフ指数を応用面から注目するとアトラクタの種類判別に用いられることが多くさまざまな信号処理のカオス状態の判定にも用い

られている [13] . 2次元の場合には一般にアトラクタは不動点とリミットサイクルのみから構成される . アトラクタが安定な不動点のみの場合にはリアプノフ指数が2つとも負になることが知られている . またリミットサイクルが存在する場合には2つのリアプノフ指数が0と負で構成されることも知られている . しかしその逆は成立せず, リアプノフ指数が0と負で構成されている場合でもリミットサイクルが存在しない特異な場合も存在する [13] . 3次元の場合には, 3つのリアプノフ指数の符号からアトラクタの判別がある程度可能になっている . 3つのリアプノフ指数の符号が $(-, -, -)$ の場合はすべてが安定な不動点で, $(-, -, 0)$ の場合は安定なリミットサイクルが, $(-, 0, 0)$ である場合は安定なトラスが存在する . またカオス的アトラクタはリアプノフ指数の符号のうち少なくとも1つが正である場合に起こることが確認されている . ただしその逆は成立せず, 正のアトラクタであっても不安定なトラス等が存在する場合もある . 符号が $(+, 0, 0)$ の場合は不安定なトラスかカオス的アトラクタ, $(+, 0, -)$ の場合はカオス的アトラクタ, $(+, +, 0)$ である場合は不安定なリミットサイクルかカオス的アトラクタとなる [13] .

1.2 従来の研究と課題

Maybhateら [1] は, 同一構造の2つのシステム間の同期をパラメータ推定に応用し, その際に, リアプノフ指数の計算を用いている . しかしながら, 安定な同期多様体のいくつかの不安定不変集合の存在から, 負のリアプノフ指数がカオス同期のための十分条件でも必要条件でもないことが報告され [2], またリアプノフ指数を正確に計算するためには, ダイナミクスが完全に既知でなければならず, 未知パラメータを含む場合には, 計算することができないという問題点がある . そこで, Huangら [3] は, リアプノフの安定論に基づいて, 時系列からすべての未知パラメータを同定するシステム論的な手法を提案している . このようなことからリアプノフの安定論が安定性解析の主流となっていると考えられる .

一方, Leonov [4] は, レギュラーなシステムの安定性は, リアプノフ指数が負であることで判定できることを指摘している . また, 時系列データの瞬時値から安定性や同期性を判定するためには, 無限時間区間での極限值が必要とするリアプノフ指数を直接用いることはできない . このため, Yodenら [5] は, 有限時間リアプノフ指数 (finite-time Lyapunov exponent, FLE) を定義している . しかしながら, この場合もダイナミクスが完全に既知でなければならず, 未知パラメータを含む場合には, FLE は計算することができない . そこでこの問題に対し, Zengら [6] は離散時系列のデータの差分値から得

られた変分方程式の近似値を用いて低精度なリアプノフ指数を推定することを提案しているが、あくまでも近似計算でしかない。また、最近、リズムパターン生成を制御理論的に取り扱う試みが、ノンホロノミック制御の考え方をを用いて行われているが、従来、非線形解析で使われている分岐理論（ホップ分岐など）との対応がはっきりしていない。さらに、生体リズムはノイズや外乱などに対して、ロバスト性にすぐれていることが指摘されているが、これに対する明確な解答は、ロバスト制御理論からは得られていない。

また Shin らは連続時間力学系における発散率の対数の導関数を用いた瞬時リアプノフ指数といったものを提案している [8]。

1.3 目的及び特徴

本研究の目的は、動的システムから生成される時系列データの瞬時値から安定性や同期性を判定する指標を提案することである。従来提案されているリアプノフ指数は、動的システムの各時刻における 2 つの軌道の間広がりの率として定義され、指数関数 $\exp(\lambda t)$ で近似した時に傾き λ で表わされる量である。しかしながら、従来提案されているリアプノフ指数は、無限時間区間での極限值が必要で、また、動的システムのパラメータが既知であるなどの制約条件がある。本研究では、時系列データが基準関数と比較したときの減衰/成長度を与える瞬時リアプノフ指数を提案する。特に、定義した瞬時リアプノフ指数において、時系列データの微分値を用いることにより平衡点からの減衰/成長度を与えることができること、また、直接時系列データを用いることにより、指定した基準点からの減衰/成長度を与えることができることを明らかにする。さらに、2 つの軌道の挙動が同期しているかどうかを判定する同期度を提案する。これらの結果は、レギュラーでない非線形システム、2 次不安定システム、および Lorenz システムに適用され、その有効性の確認を行う。さらに、非線形性の強い生物系である生物学的ニューロンモデルや光合成システムモデルの内部状態推定問題に適用、これらの時系列データの減衰/成長度の指標として瞬時リアプノフ指数がどの程度有効であるのかを明らかにする。

1.4 本論文の構成

まず第 2 章では従来提案されていたリアプノフ指数を挙げるとともにそれらの問題点を示す。その後それらの問題を改善する新たな指数である瞬時リアプノフ指数 (ILE)

の提案を行う。また、システムの安定性を示す ILE を 2 つの信号の同期の程度を示す指標やシステムの挙動の速度の差を表す指標などの応用について述べる。提案や拡張を行った ILE を様々な既知の非線形システムに適用し性能の検証を第 3 章で行う。また、その応用例として CAM 植物や HR ニューロンモデルの内部状態推定問題に適用を行うために、第 4 章にてそれらの各種問題について触れ、第 5 章にて適用例を示す。最後に総括として第 6 章にて考察・まとめを行っていく。

第2章 瞬時リアプノフ指数について

2.1 はじめに

本章では従来定義されてきたリアプノフ指数やその改善案を述べるとともに、その問題を指摘し、それらの問題を改善する新たな指数である、フローの減衰度を基にした瞬時リアプノフ指数 (ILE) の定義を行う。

2.2 リアプノフ指数・有限時間リアプノフ指数

次の非線形システムを考える。

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (2.1)$$

ただし、 $x \in R^n$ とする。 $y(t_0)$ は初期時刻 $t = t_0$ での初期値 $x(t_0)$ からの小さな摂動とする。 $y(t_0)$ から出発するフローの接空間は次の微分方程式を満たす。

$$\dot{y}(t) = J(x(t))y(t) \quad (2.2)$$

ただし、 $J(x(t))$ は $x(t)$ でのヤコビ行列、つまり

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i(x(t))}{\partial x_j}$$

このとき解は次式のように書ける。

$$y(t_0 + \tau) = M(x(t_0), \tau)y(t_0) \quad (2.3)$$

ただし $M(x(t_0), \tau)$ は指数関数行列で、次式のように表わされる。

$$M(x(t_0), \tau) = \exp \{J(x(t_0))\tau\} \quad (2.4)$$

このとき, 直行ベクトルの集合 $\{f_i(x(t_0))\}$ に対して, 次の指数 (リアプノフ指数, Lyapunov exponent) を定義する .

$$\lambda_i = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \log \|M(x(t_0), \tau) f_i(x(t_0))\| \quad (2.5)$$

また n 次元位相空間における, フローの局所的に変形させた n 次元楕円体の i 番目の主軸の長さ $P_i(t)$ を用いて次のようにも表すことができる .

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{P_i(t)}{P_i(0)} \quad (2.6)$$

この指数のうちの最大のものを最大リアプノフ指数といい, 非線形システムの解 (フロー) が遠ざかっていく速さの最も大きなものを代表している . この値が正であるとフローが現在の位置から離れていくことを意味しており, その位置が局所安定ではないことを物語っていると考えられている . しかしながら, 時系列解析においては, 瞬時状態を考える必要があることから, リアプノフ指数を直接用いることはできない .

このため Yoden らは次式で定義される有限時間リアプノフ指数 (finite-time Lyapunov exponent, FLE) を定義している .

$$\lambda_i(x(t_0), \tau) = \frac{1}{\tau} \log \|M(x(t_0), \tau) f_i(x(t_0))\| \quad (2.7)$$

しかしいずれの場合もシステムのヤコビ行列が必要であるため未知のパラメータを含むシステムには適用できない .

2.3 一般化リアプノフ指数

まず線形系のリアプノフ指数と非線形系のリアプノフ指数の比較を行う . 次式で与えられる線形時変系を考える .

$$\dot{x} = A(t)x(t) \quad (2.8)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.9)$$

ここで $x \in R^n$ とし, 上式の解 (フロー) を $\phi(t, x_0)$ とおく . 初期状態 x_0 に対するリアプノフ指数は次式で定義される .

$$\lambda(x_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\phi(t, x_0)\| \quad (2.10)$$

上式で \sup を利用している理由は $\frac{1}{t} \log \|\phi(t, x_0)\|$ が振動的で極限が存在しない場合もあるためである．次に次式で与えられる非線形を考える [15].

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (2.11)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.12)$$

線形時変形と同様に $x \in R^n$ とし, f は微分多様体上で定義されるフロー上式の解 (フロー) を $\phi(t)$ を生成する連続 1 回微分可能 (C^1 級) 関数とする．上式はすべての t に対して一意解を持つことが知られている．ここで, 線形近似系の解である微分フロー $d\phi$ に注目をする．非線形方程式 (2.11), (2.12) の解を $x_r(t)$ とし, これを参照軌道 (reference trajectory) と呼ぶ．微分フロー $d\phi$ は参照軌道 x_r に対する無限小摂動 (infinitesimal perturbation) $y(t)$ の漸近特性を考えればよい．参照軌道 x_r に対する摂動を y とすると, 参照軌道に対する無限小摂動の時間発展を表す変分方程式は次式の線形微分方程式で与えられる．

$$\dot{y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_r} y \quad (2.13)$$

ただし $\frac{\partial f}{\partial x}$ は $f(x)$ の Jacobian matrix である．(2.13) はすべての初期条件 $y(t, t_0^*)$ に対して一意解を持つ．この解である摂動 y は次式で与えられる

$$y(t) = \Phi(t, t_0^*) y_0 \quad (2.14)$$

ここで $\Phi(t, t_0^*)$ は, 線形化されたフロー行列, つまり時刻 t_0 における $f(x_r)$ の接空間である E_0 から E_t への線形写像であるといえる．写像は次の性質を持つことがよく知られている．

$$\Phi(t_2, t_0^*) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0^*) \quad (2.15)$$

$$\Phi(t_n, t_n) = I \quad (2.16)$$

ただし $t_2 > t_1 > t_0^*$ とする．ここで Φ は時間と参照軌道に依存することに注意し次式を仮定する．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t, t_0^*)\| < \infty \quad (2.17)$$

ただし $\|\Phi\|$ は行列ノルムで次式で定義される．

$$\|\Phi\| = \max \left\{ \text{eig}(\sqrt{\Phi^T \Phi}) \right\} \quad (2.18)$$

ここで $\text{eig}(A)$ は、行列 A の固有値である。初期条件 (2.12) での非線形系 (2.11) の応答のリアプノフ指数は次式で定義される。

$$\lambda(y_0, x_r) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|y(t)\|}{\|y_0\|} \quad (2.19)$$

上式の極限は、 $\|\frac{\partial f}{\partial x}\|$ がルベーグ可積分であるときに存在することが知られている。この場合上式は次のように表すことができる。

$$\lambda(y_0, x_r) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|y(t)\|}{\|y_0\|} \quad (2.20)$$

実際に数値計算でリアプノフ指数を求めるには線形化された微分方程式 (2.13) を離散時間化して近似計算をする。その際の手順は次のようになっている。まず時刻 Δt で (2.13) を離散時間近似を行う。次にランダムな初期摂動を条件 $\|y_0\|$ の下に選び、離散時刻を $t_n = t_0^* + \Delta t$ と定義する。各時間ステップ t_n での摂動ベクトルの時間発展は (2.13) の離散時間近似を各ステップ毎に解くことにより $y(t_n) = y_n$ として得られる。摂動ベクトル y_n は指数関数的に大きくなってしまふ恐れがあるため数値計算ではオーバーフローする可能性がある。これを回避するために各ステップでベクトルを正規化し、そのベクトルを用いて時間発展を計算する。各ステップで得られた摂動ベクトルのノルム d_n をとくと、(2.15)(2.16) より次式が成り立つ。

$$\|y_n\| = d_n d_{n-1} \cdots d_1 \quad (2.21)$$

このことから各ステップでのリアプノフ指数の近似が次式のように計算できる。

$$k_n = \frac{1}{t_n} \log \|y_n\| = \frac{1}{t_n} \sum_{i=1}^n \log(d_i) \quad (2.22)$$

したがってリアプノフ指数はその極限として次式で与えられる。

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0} k_n \quad (2.23)$$

ここで、線形系と非線形系を比較すると、次のようなことが考えられる。式 (2.19) は線形化された微分方程式 (2.13) が得られてはじめて計算することができる。また非線形系 (2.11) の両辺を時間微分すると次式が得られる。

$$\ddot{x} = \frac{df(x)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \dot{x} \quad (2.24)$$

この式から, \dot{x} が線形化された微分方程式 (2.13) の解 y とみなすことができる. したがって非線形系 (2.11) の応答のリアプノフ指数は次式で表すことができる.

$$\lambda(x_0, x_r) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\dot{x}(t)\|}{\|\dot{x}_0\|} \quad (2.25)$$

ここで, (2.10) と (2.25) を比較すると, 線形系ではそのままのフローを用い, 非線形系では微分フローを用いることにことになる為, 対象のシステムがどちらかわからない場合にはどちらの定義を用いればよいかわからなくなってしまう. このため Caraballo[7] は非線形系でもフローを用いて, 一般化リアプノフ指数 (generalized Lyapunov exponent) を次のように定義している. 正值関数 $p(t) \uparrow \infty$ が十分に大きな $t > 0$ に対して定義されているとする. $\varphi(t, x_0)$ を非線形系 (2.11), (2.12) のフロー (解) とし, 次式を定義する.

$$\lambda = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|\varphi(t, x_0)\|}{\log p(t)} \quad (2.26)$$

この λ を $p(t)$ に関する $\varphi(t, x_0)$ の一般化リアプノフ指数と呼ぶ [7]

2.4 Shin らの提案している ILE

Shin らは文献 [8] にて次のような瞬時リアプノフ指数を提案している. 連続時間力学系システムにおいて (2.6) について時間平均の極限をとることから指数の計算について有用ではないため, リアプノフ指数は時間関数や反復回数に関する関数の推定によって記述される. その場合 (2.6) は次のようになる.

$$\lambda_i = \frac{1}{t} \log \frac{P_i(t)}{P_i(0)} \quad (2.27)$$

同様にシステムが差分方程式等で記述されている場合, リアプノフ指数は次のような連続時間システムと同様の手法で定義される.

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{k} \log \frac{P_i(k)}{P_i(0)} \quad (2.28)$$

ここで $P_i(k)$ は i 番目の主軸の長さであり, k はシステムの反復回数であるとする. [8] ではリアプノフ指数の推定値は, 長期的な平均値から得られると仮定することによりリアプノフ指数 (λ_i) はその推定値を意味し, 特に明記しない限り (2.27)(2.28) の表記法は使用されない. また λ_i の何れかが正である場合, 近くの軌道は発散し, その展開は初期条件に敏感であり, カオスである. しかしそのカオス軌道の発散はシステムが

有界である場合，局所的な指数関数であるためリアプノフ指数を得るには長い時間の指数的増加の平均が必要である．リアプノフ指数は n 次元位相空間での楕円体の主軸として定義されており，その楕円体の体積の挙動はリアプノフ指数の和に関係している．フローの作用の下で n 次元位相空間における n 次元体積 V の変化の相対的な速度は，フローのリー微分によって一般化された発散で与えられる．

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (2.29)$$

体積変化のこの相対速度は，リアプノフ指数で表すことができる．

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (2.30)$$

したがってリアプノフ指数の和はフローの一般化された発散に等しいが，本来リアプノフ指数は発散率の平均から得られるので厳密な関係はない一方一般化されたフローの発散は継続的にフロー自身の作用で変化する恐れがある．このことは次の瞬時リアプノフ指数 (ILE) を定義することによってより厳密に記述することができる．(2.27) における発散率 $\frac{P_i(t)}{P_i(0)}$ は連続時間系であり (2.6) から得られた軌道は滑らかで有界なので，発散率も滑らかで有界であることから発散率は微分可能である．そのため連続時間力学系における ILE は発散率の対数の導関数として定義する．

$$\alpha_i(t) = \frac{d}{dt} \left[\log \frac{P_i(t)}{P_i(0)} \right] \quad (2.31)$$

また，離散時間力学系における ILE はより簡易な次式のような形になる．

$$\alpha_i(k) = \log \frac{P_i(k)}{P_i(k-1)} \quad (2.32)$$

ここで $\alpha_i(k)$ は k 回目の繰り返しにおける i 番目の ILE を表し，その発散率を示している．ILE は通常のリアプノフ指数とは異なり，与えられた時間での発散，収束率を時変量で表していることから，ILE は時変軌道の発散，収束率を示している．また ILE の時間平均は次のようになる．

$$\hat{\lambda}_i(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i(\tau) d\tau \quad (2.33)$$

従って, 時刻 t における i 番目の主軸の長さは, ILE によって記述することができる

$$P_i(t) = P_i(0) \exp \left[\int_0^t \alpha_i(\tau) d\tau \right] \quad (2.34)$$

また時刻 t における n 次元位相体積は次のようになる

$$V(t) = V(t_0) \exp \left[\sum_{i=1}^n \int_0^t \alpha_i(\tau) d\tau \right] \quad (2.35)$$

ここで $\sigma(t)$ を ILE の総和とすると (2.35) は次のようになる .

$$\begin{aligned} V(t) &= V(t_0) \exp \left[\int_0^t \sigma_i(\tau) d\tau \right] \\ \therefore \frac{1}{V(t)} \frac{dV(t)}{dt} &= \sigma(t) \end{aligned} \quad (2.36)$$

(2.36) より ILE の総和はフローの一般化された発散に等しくフローの一般的な発散の瞬間的な動作を表している . また ILE の区間平均値として SLE を定義する .

$$S_i(t) = \frac{1}{t_w} \int_{t_1}^{t_1+t_w} \alpha_i(\tau) d\tau \quad (2.37)$$

ここで t_w は窓の長さとする . ILE はノイズの影響を受けやすいため, 特に実験データに適用する際に SLE が必要となる .

今後, 本論文では Shin らの ILE を一般化瞬時リアプノフ指数 (GILE), その区間平均を GSLE と呼ぶことにする .

2.5 瞬時リアプノフ指数の定義

前項までに述べたとおり, 従来のリアプノフ指数を計算する際には対象のシステムが既知であり, また瞬時状態には式の性質上適用することができない . そこで, われわれは新たに指定した基準点に対する減衰/成長度を示す, 時変な基準点に対応できるような基準関数を用いた, 次式で表される瞬時リアプノフ指数 (Instantaneous Lyapunov Exponent, ILE) を定義する .

$$\lambda(t) = \frac{1}{t} \log \left\{ \frac{\|x(t)\|}{\phi(t)} \right\} \quad (2.38)$$

ただし $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0, \phi(t) \geq 0$ である . このとき $\phi(t)$ を安定判別のための基準関数と呼び, ILE が正值でなければ, 対象のシステムと基準関数に次式の関係が成り立ち対象のシステムは安定傾向にあると考えられる [9] .

$$\phi(t) \geq \|x(t)\| \quad (2.39)$$

提案をした ILE は動的システムの出力応答信号を入力関数として使用するため，内部パラメータが未知の場合でも適用することができ，それ自身は出力応答信号と基準関数との比，つまり，基準関数に対する減衰/成長度を指数関数 $\exp(\lambda t)$ で近似した際の時係数 λ として表しているといえる．また，今回入力関数を変化させた 2 種類の ILE の提案を行う．それぞれの ILE は次のように定義する．

$$\lambda_n(t) = \frac{1}{t} \log \left\{ \frac{\|x(t)\|}{\phi(t)} \right\} \quad (2.40)$$

$$\lambda_l(t) = \frac{1}{t} \log \left\{ \frac{\|\dot{x}(t)\|}{\phi(t)} \right\} \quad (2.41)$$

ここで $x(t)$ を次式で与えられる非線形系とする．

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (2.42)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.43)$$

(2.11),(2.12) と同様に $x \in R^n$ とし, f は微分多様体上で定義されるフロー上式の解 (フロー) を $\eta(t)$ を生成する連続 1 回微分可能 (C^1 級) 関数とする．上式はすべての t に対して一意解を持つことが知られている．ここで, 線形近似系の解である微分フロー $d\eta$ に注目をする．(2.11),(2.12) と同様に非線形方程式の解を $x_{r1}(t)$ とし, これを参照軌道 (reference trajectory) と呼ぶ．微分フロー $d\eta$ は参照軌道 x_{r1} に対する無限小摂動 (infinitesimal perturbation) $y(t)$ の漸近特性を考えればよい．参照軌道 x_{r1} に対する摂動を y とすると, 参照軌道に対する無限小摂動の時間発展を表す変分方程式は次式の線形微分方程式で与えられる．

$$\dot{y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_r} y \quad (2.44)$$

ただし $\frac{\partial f}{\partial x}$ は $f(x)$ の Jacobian matrix である．非線形系 (2.42) の両辺を時間微分すると次式が得られる．

$$\ddot{x} = \frac{df(x)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \dot{x} \quad (2.45)$$

この式から, \dot{x} が線形化された微分方程式 (2.44) の解 y とみなすことができ, $\lambda_n(t)$ は非線形フローを基にした ILE で $\lambda_l(t)$ は線形化フローを基にしたものであるといえる．

もし $\lambda(t) < 0$ ならば, $\|x(t)\|$ は $t \rightarrow \infty$ において基準関数より速くゼロに減速を行う．また $t \in (0, T_0)$ において $\lambda(t) < 0$ ならば, $t \in (0, T_0)$ において $\|x(t)\| < \phi(t)$ である．

つまり、有限時間間隔で減衰率の推定が可能になっている。また ILE の符号が正である場合、減衰率は基準関数の値より遅いものになっており、 e^{-at} , $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{\sqrt{t}}$ などといった形で自由に選択が可能である。 λ_l は平衡点への局所的な減衰率を表しており、 $\lambda_n(t)$ はゼロへの減衰率を表している。したがって、 $\lambda_n(t)$ は平衡点がゼロでない場合、ゼロへ収束はしないものと考えられる。

また今回提案する瞬時リアプノフ指数は、前項でふれた、Shin ら一般化瞬時リアプノフ指数 [8] の時間平均になる。

$$\hat{\lambda}_i(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i(\tau) d\tau \quad (2.46)$$

一般化瞬時リアプノフ指数と同様に瞬時リアプノフ指数はカオス信号やノイズがある場合には値の変動が大きくなるため、 λ_n および λ_l の移動平均を別の指標として提案する。この手法は Shin らの提案している GSLE と同様のものであり、ILE をもとにしたものであるため未知パラメータを含む動的システムにも適用できる点が Yoden らの有限時間リアプノフ指数より優れているといえる。

$$\bar{\lambda}_n(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_n(t - iT) \quad (2.47)$$

$$\bar{\lambda}_l(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_l(t - iT) \quad (2.48)$$

ここで T はサンプリング時間、 N はサンプリングデータ数であり、共に適当に設定を行う。本論文では特に断りのない場合 $T = 0.01$, $N = 10$ とする

微分推定器

線形化フローを用いた ILE λ_l はそれ自身が入手不可能な場合は、導出することができない。このため未知の動的システムが発生する出力信号の微分器を適応オブザーバとして提案する [10]。時刻 t における測定信号を $x(t)$ とし、 $x(t)$ の時間に関する 1 階導関数として $\theta(t)$ を定義すると次式が成り立つ。

$$\frac{dx(t)}{dt} = \theta(t) \quad (2.49)$$

また $\theta(t)$ は次式で表せるものとする。

$$\theta(t) = \theta_0 + \epsilon(t) \quad (2.50)$$

ここで θ_0 は未知定数であり, $\epsilon(t)$ の上限は既知定数 ϵ_0 を用いて

$$\epsilon(t) \leq \epsilon_0 \quad (2.51)$$

と表せると仮定する .

この時, モデルに基づかない微分器の設計問題は次のように定義される .

信号 $x(t)$ が測定可能で, その信号を発生させるダイナミクス情報を用いずに, 導関数 $\dot{\theta}(t)$ を推定するための微分器を設計する .

この問題を満たす適応オブザーバの設計を行う . 信号 $x(t)$ の 1 階導関数である $\frac{dy(t)}{dt}$ の推定は適応オブザーバ内のパラメータ調整則で与えられる .

$$\dot{\hat{x}} = -k(\hat{x} - x) + \hat{\theta}(t) - \epsilon(t) \operatorname{sgn}(\hat{x} - x) \quad (2.52)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma(\hat{\theta}(t) - x(t)), \dot{\hat{\epsilon}} = |\hat{x}(t) - x(t)| \quad (2.53)$$

ここで $k > 0$ であり, $\dot{\hat{x}}(t)$ の推定量は次式で与えられる .

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \hat{\theta}(t) = -\int_0^t \gamma(\hat{x}(\tau) - x(\tau)) d\tau \quad (2.54)$$

この推定器をモデルに基づかない適応微分推定器と呼ぶ . またオブザーバ誤差を $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ と定義すると次の誤差方程式が得られ, その安定性を示すことができる .

$$\dot{e} = -ke + \tilde{\theta} - \hat{\epsilon}(t) \operatorname{sgn}(e) - \epsilon(t) \quad (2.55)$$

ここで $\tilde{\theta} = \hat{\theta}(t) - \theta_0$ である .

補正項についての考察

(2.38) を 0 に収束するようなモデル ($x(t) = 0$) に適用する場合を考えると ILE は $-\infty$ を示してしまい, 計算上は問題ないがコンピュータを用いたシミュレーションに利用するには不適であると考えられる . そこで (2.38) に補正項を追加する . これまでの研究では $x(t) = 0$ において ILE は 0 を示し, また ILE が正值でない条件が $\|x(t)\| = \phi(t)$ に近似することができるような次式の補正項の提案を行ってきた .

$$\lambda_n(t) = \frac{1}{t} \log \left\{ \frac{\|x(t)\|}{\phi(t)} + e^{-\alpha \frac{\|x(t)\|}{\phi(t)}} \right\} \quad (2.56)$$

ただし $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0, \phi(t) \geq 0, \alpha \gg 1$ である。

しかし ILE を符号だけでなくその数値にも意味づけを行ってしまう際に式 (2.56) を利用すると、図 2.1 のように、ILE の数値と $\frac{\|x(t)\|}{\phi(t)}$ との一对一の関係がなくなってしまう。そのため、本論文では次の補正項を採用する。

$$\lambda_n(t) = \frac{1}{t} \log \left\{ \frac{\|x(t)\|}{\phi(t)} + e^{-\alpha} \right\} \quad (2.57)$$

ただし $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0, \phi(t) \geq 0, \alpha \gg 1$ である。この場合 $x(t) = 0$ のときに ILE は $-\frac{\alpha}{t}$ の値をとる。微分フローを用いた場合の ILE の記述を前述の問題点に注意し次式のように定義する。

$$\lambda_l(t) = \frac{1}{t} \log \left\{ \frac{\|\dot{x}(t)\|}{\phi(t)} + e^{-\alpha} \right\} \quad (2.58)$$

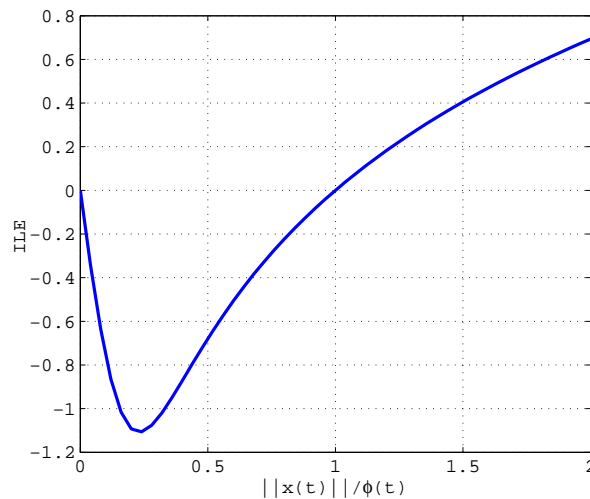


図 2.1: ILE と $\frac{\|x(t)\|}{\phi(t)}$ の関係 ($t = 1$ の場合)

また本論文では補正項について特に断りのない場合 $\alpha = 10$ とする。

2.6 同期指標としての ILE の拡張

本項では提案した ILE をもとに、システムの同期指標値、およびシステムの速度の差を表す指標に対応できるように拡張を行い、その挙動の考察する。同期指標につい

ては基準関数 $\phi(t)$ を一方の信号を利用し改良することにより制御の過渡特性における整定時間のような指標付けが可能となっている。

2つの信号 $x_1, x_2 (x_1 \geq 0)$ の同期判定を行うため, (2.56)(2.47) を用いて次式を同期度として導入する。

$$\mu_n(t) = \frac{1}{t} \log \left\{ \frac{\|x_1(t)\|}{\|x_2(t)\|} \right\} \quad (2.59)$$

$$\bar{\mu}_n(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \mu_n(t - iT) \quad (2.60)$$

またシミュレーションを行いやすいように (2.59), (2.60) に次のような補正項を与える。

$$\mu_n(t) = \frac{1}{t} \log \left\{ \frac{\|x_1(t)\| + e^{-\alpha}}{\|x_2(t)\| + e^{-\alpha}} \right\} \quad (2.61)$$

ただし $\alpha \gg 1$ とする。ここで同期度の挙動について考察を行う。ILE は (??) が表すように基準関数と入力関数のノルムの差を指数関数の時係数で表すものである。(2.39) より安定傾向の条件は

$$\|x_1(t)\| \geq \|x_2(t)\|$$

となるため, 同期度の振る舞いとしては x_2 に対する x_1 の相対誤差のを表す指数関数の時係数を表すことになる。しかしながら図 2.2 のように $x_2(t) = 3 + e^{-0.5t}$ と同じ値に収束する $x_{11} = 3 - e^{-t}$ と同値に収束しない $x_{12} = 1 - e^{-t}$ に対しそれぞれ μ_n を適用すると図 2.3 のようになり, 直感的にどの程度同期しているかを判別できない。そこで次式のような誤差の許容率 β を用いた同期判定を行う ILE を導入する。

$$\mu_{\beta n}(t) = \frac{1}{t^2} \log \left\{ \frac{\|x_1(t)\| + e^{-\alpha}}{\|(1 + \beta)x_2(t)\| + e^{-\alpha}} \right\} \cdot \log \left\{ \frac{\|x_1(t)\| + e^{-\alpha}}{\|(1 - \chi)x_2(t)\| + e^{-\alpha}} \right\} \quad (2.62)$$

$$\bar{\mu}_{\beta n}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \mu_{\beta n}(t - iT) \quad (2.63)$$

この場合 $\|x_1(t)\| \leq \|(1 + \chi)x_2(t)\|$ つまり対象の関数 x_1 と基準となる関数 x_2 の誤差が β パーセントである場合 ILE はマイナスの値を示すようになり, 図 2.4 における 2 本の点線で挟まれた領域に x_1 が存在するとその値は負を示す。

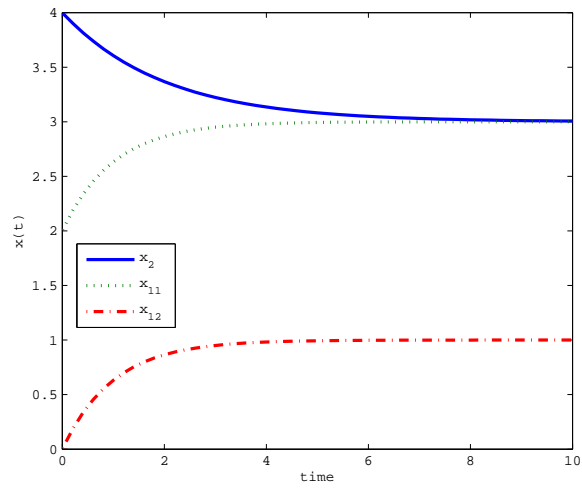


図 2.2: 収束するシステムへの適用例

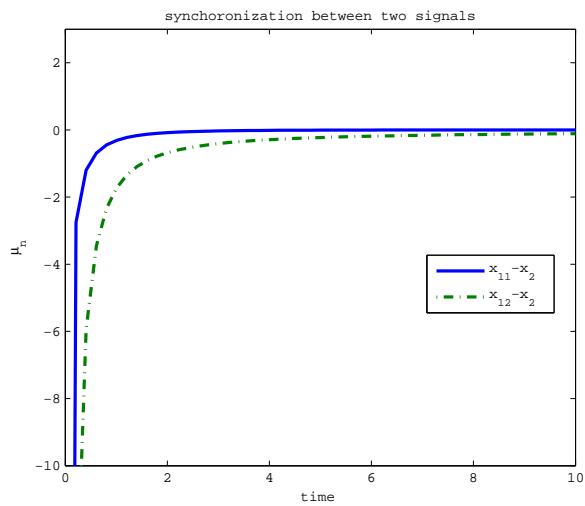


図 2.3: 図 2.2 における同期度

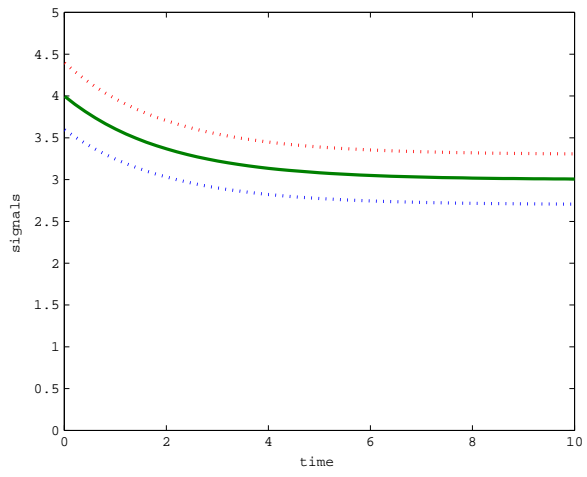


図 2.4: 図 2.3 における ILE の符号の領域

第3章 非線形システム減衰度判別への適用

3.1 はじめに

本章から提案した瞬時リアプノフ指数をすでにその挙動や平衡点等が知られている, 様々なシステムに適用することによりその有効性を確認する. まず安定判別への適用としていくつかのシステムに ILE と時系列分析ソフトウェアである Sunday ChaosTimes((株) あいはら) によって算出したリアプノフスペクトラムとの比較を行う. また Lorenz システムを

3.2 安定判別への適用

3.2.1 2次系のシステム

つぎの2つの2次システムを考える.

$$(S_1) \quad \ddot{x} + |\dot{x}|\dot{x} + x^3 = 0 \quad (3.1)$$

$$(S_2) \quad \ddot{x} - |\dot{x}|\dot{x} + x^3 = 0 \quad (3.2)$$

ここで, (S_1) は原点が漸近安定で, (S_2) は不安定なシステムである. それぞれのシステムに対して, 初期値, 基準関数を変更してシミュレーションを行う. 初期値と基準関数は次のとおりである.

$$(x(0)) = 0, \dot{x}(0) = 0.5$$
$$(\phi_1(t), \phi_2(t)) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t}\right)$$

図 3.1,3.7 はそれぞれのシステムの応答を, 図 3.2,3.8 はその応答に対するリアプノフスペクトラムを表している. また図 3.3~図 3.6, 図 3.9~図 3.12 はシステムの応答に対する ILE についてまとめてあり, それぞれの応答に対して次の順番に表す.

1. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
2. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
3. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE の移動平均 $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$
4. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$

s_1 のような振動を行いながら収束していく信号の場合リアプノフスペクトラムは図 3.2 の示すように早期時刻において正の値を示したのちに負の値を示している．それに対し，提案した ILE も同様の挙動を示しているが特に λ_l に注目してみると特に基準関数 $\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$ の場合，リアプノフスペクトラムより早い時間で負の値を示していることがその移動平均から確認でき，より判定の精度がよいと考えられる．一方 s_2 のような単調増加のシステムについてはリアプノフスペクトラムと ILE の性能の差はほぼなく ILE 自体が信号の応答に振動を伴うシステムに対し，通常のリapunofフスペクトラムより良い性能を発揮することが伺われる．また ILE の基準関数 ϕ の変更は ILE の信号の反応の強さにつながっており，より速くゼロに収束する関数を用いることにより，大きな反応が確認できる．

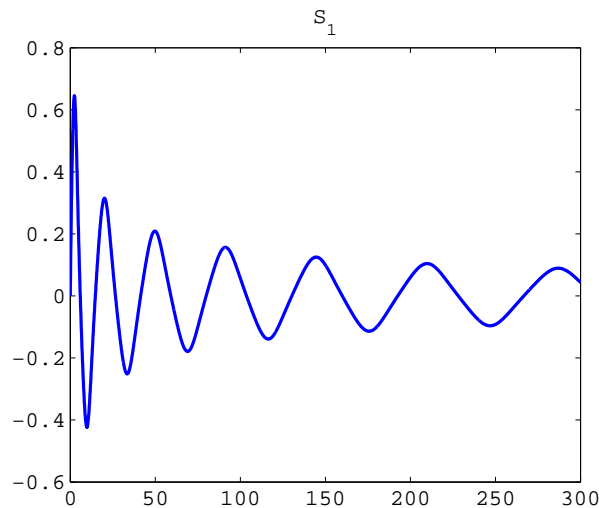


図 3.1: S_1 の応答波形

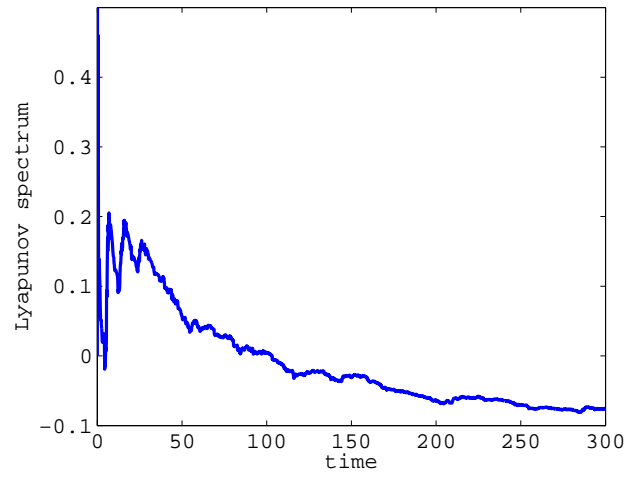


図 3.2: S_1 のリアプノフスペクトラム

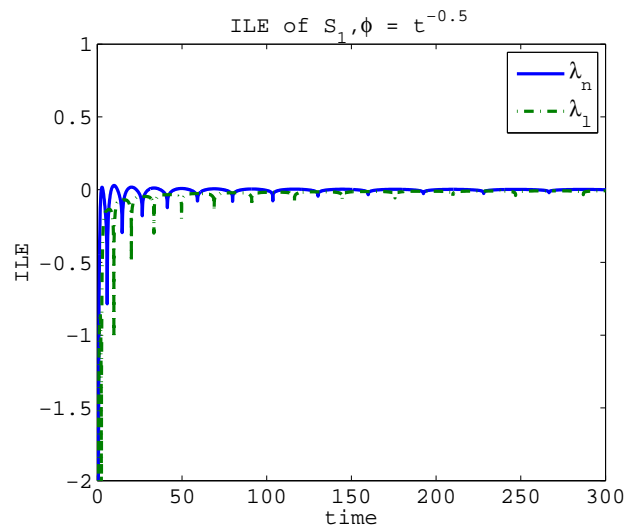


図 3.3: S_1 の ILE($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

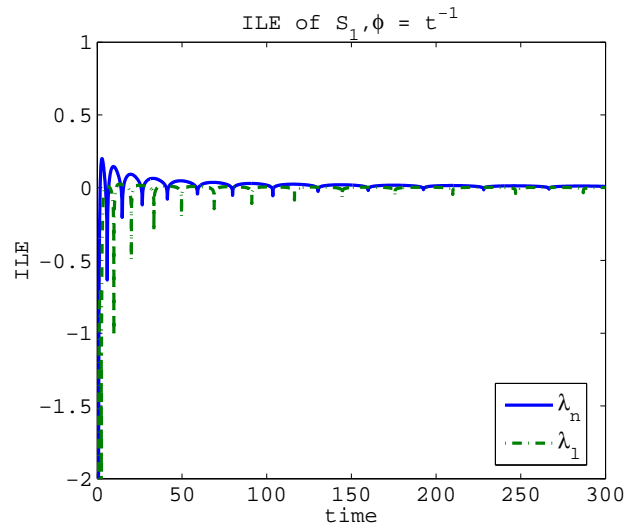


図 3.4: S_1 の ILE($\phi = \frac{1}{t}$)

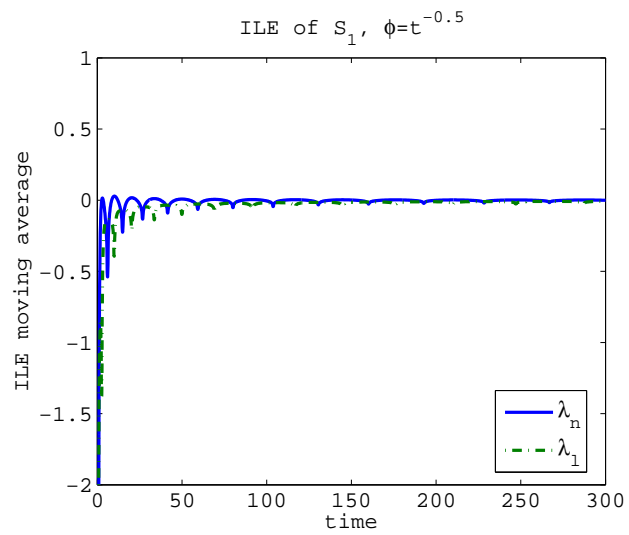


図 3.5: S_1 における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

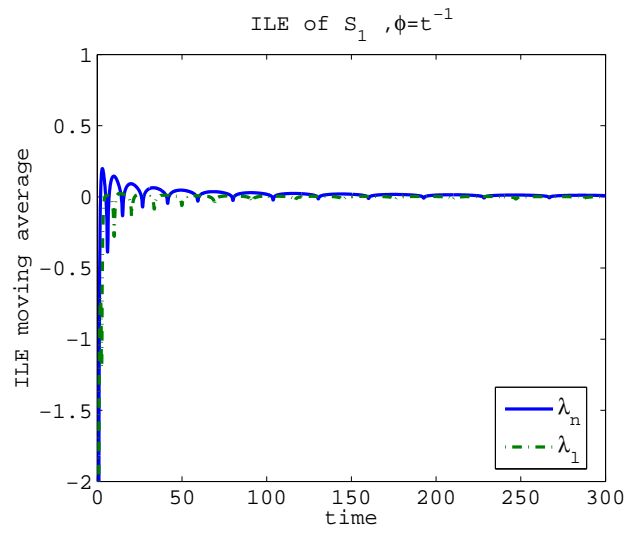


図 3.6: S_1 における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{t}$)

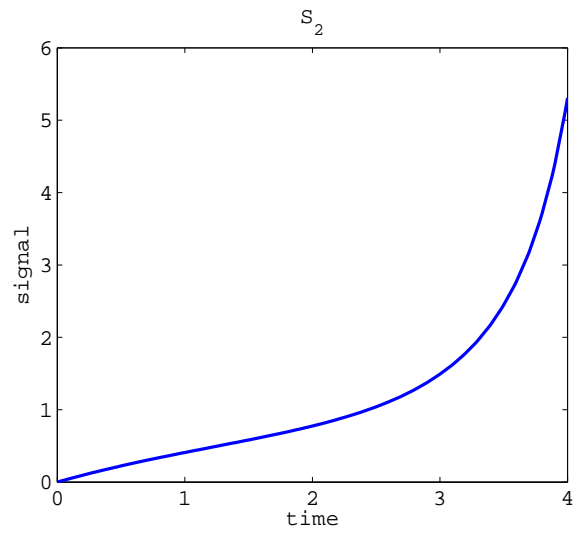


図 3.7: S_2 の応答波形

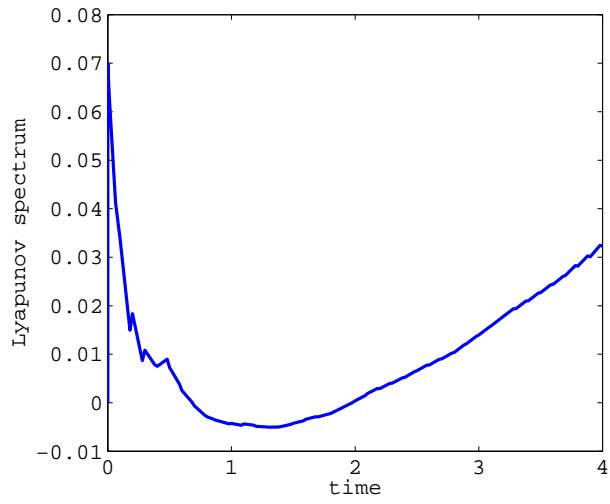


図 3.8: S_2 のリアプノフスペクトラム

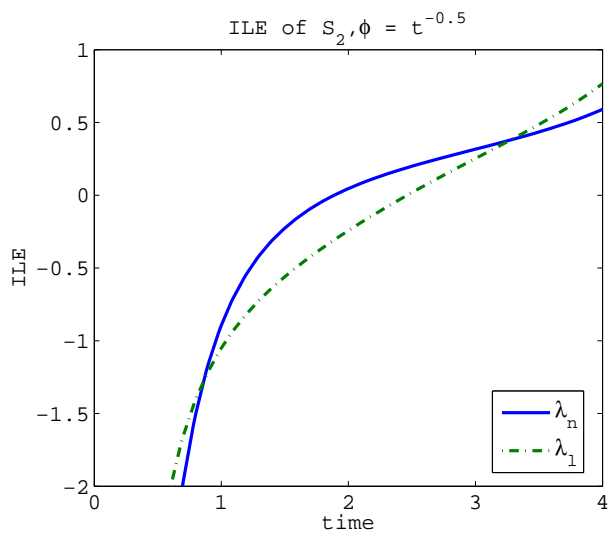


図 3.9: S_2 の ILE($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

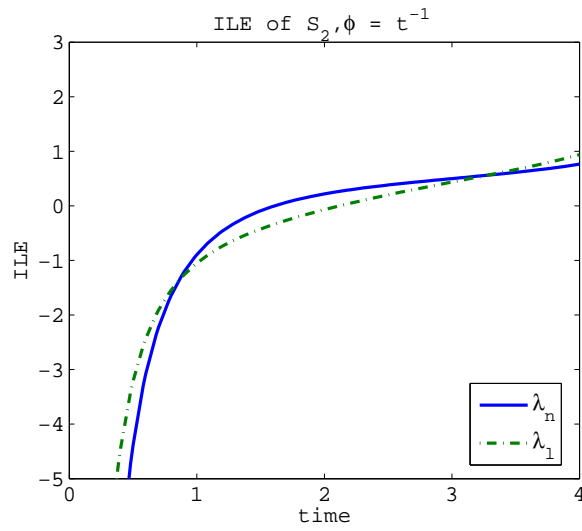


図 3.10: S_2 の ILE ($\phi = \frac{1}{t}$)

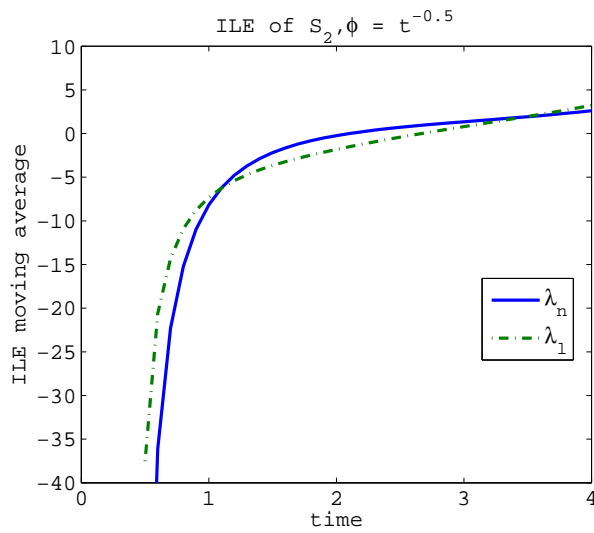


図 3.11: S_2 における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

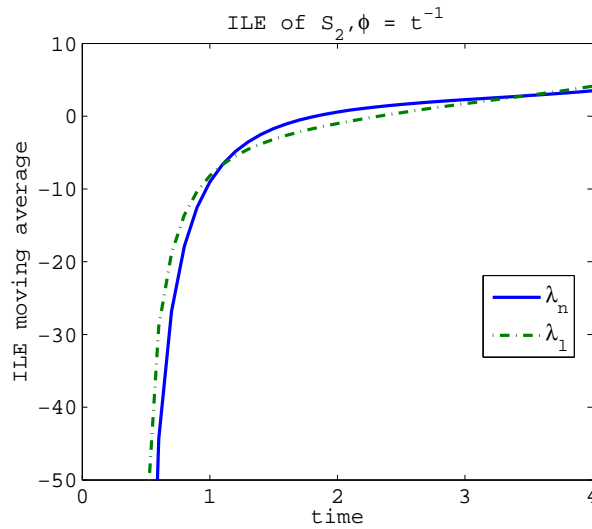


図 3.12: S_2 における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{t}$)

3.2.2 初期値により有限発散時刻を持つシステム

つぎのシステムを考える .

$$\dot{x} = -x + x^2(\epsilon \cdot e^{-t}) \quad (3.3)$$

このシステムは $x(0) < 2 \cdot \epsilon^{-1}$ の時に原点で安定であり, $x(0) > 2 \cdot \epsilon^{-1}$ の時に有限発散時刻 $t = \log \frac{\epsilon \cdot x(0)}{\epsilon \cdot x(0) - 2}$ を持つ . このシステムに対して初期値, 基準関数を変更してシミュレーションを行う . 初期値と基準関数は次のとおりである .

$$\begin{aligned} (x_1(t_0), x_2(t_0)) &= (1, 1.10524) \\ \phi_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{t}}, t_0 = 0.1 \\ \epsilon &= 2 \end{aligned}$$

図 3.13, 3.19 はそれぞれ初期値を変更した際のシステムの応答を, 図 3.14, 3.20 はその応答に対するリアプノフスペクトラムを表している . また図 3.15 ~ 図 3.18, 図 3.21 ~ 図 3.24 はシステムの応答に対する ILE についてまとめてあり, それぞれの応答に対して次の順番に表す .

1. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
2. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE λ_n, λ_l

3. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE の移動平均 $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$

4. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$

システムが収束する場合はリアプノフスペクトラム，瞬時リアプノフ指数ともに負の値を示し，対象のシステムが発散する場合はリアプノフスペクトラム，瞬時リアプノフ指数ともに正の値を示す．しかし，各指数が非正值をとり続け始める時間に注目すると対象のシステムが安定な場合，リアプノフスペクトルは 4.5(図.3.14) であるが瞬時リアプノフ指数は基準関数になだらかな $\frac{1}{\sqrt{t}}$ の場合でも 2.2 程度(図.3.15) と倍程度の差が確認できた．また不安定なシステムに適用した際はリアプノフスペクトラムのほうが正值を示し続ける時間は瞬時リアプノフ指数より早い，瞬時リアプノフ指数が正值を示しだす時間も 0.5 程度と比較的初期状態で示すため安定・不安定の判別の際は瞬時リアプノフ指数が優れていると考えられる(図.3.20,3.21)．

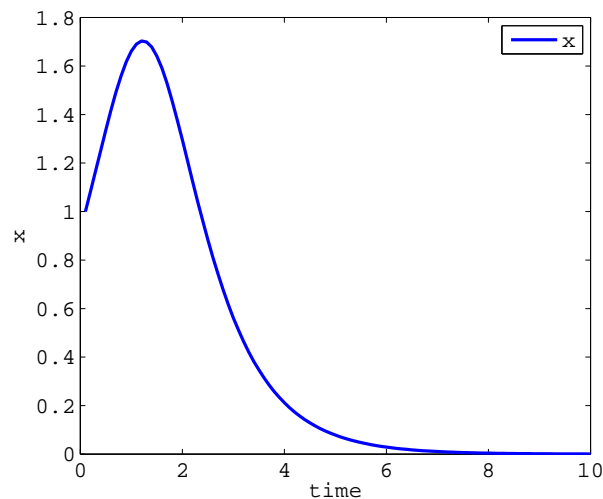


図 3.13: 応答波形 ($x(t_0) = 1$)

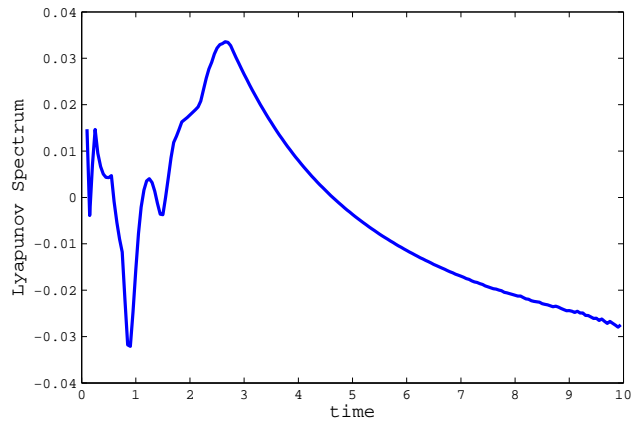


図 3.14: リアプノフスペクトラム ($x(t_0) = 1$)

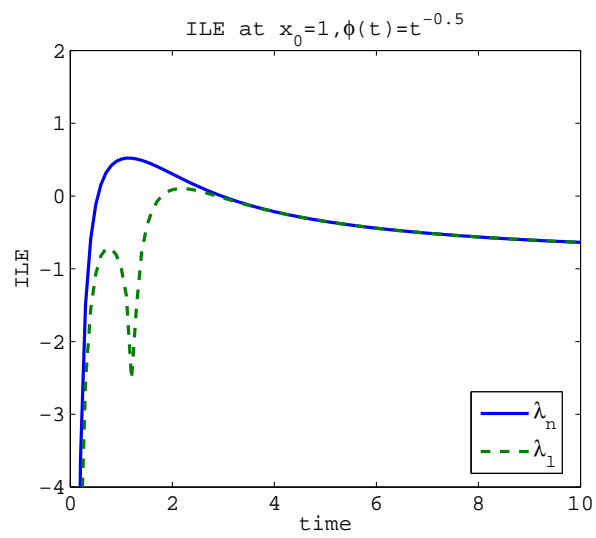


図 3.15: $x(t_0) = 1$ における $\text{ILE}(\phi = \frac{1}{\sqrt{t}})$

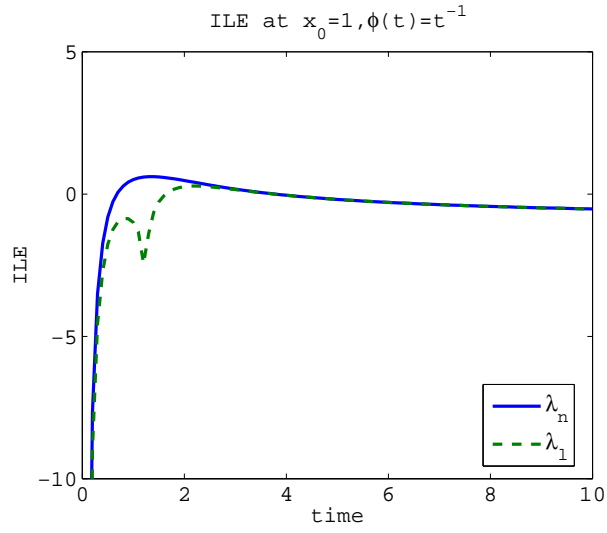


図 3.16: $x(t_0) = 1$ における $\text{ILE}(\phi = \frac{1}{t})$

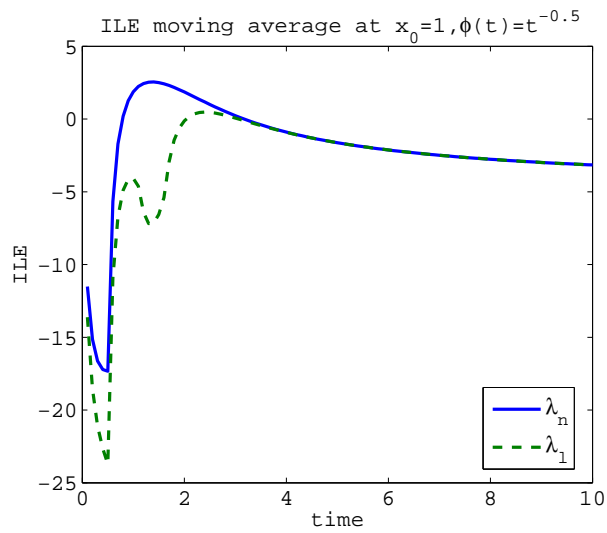


図 3.17: $x(t_0) = 1$ における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

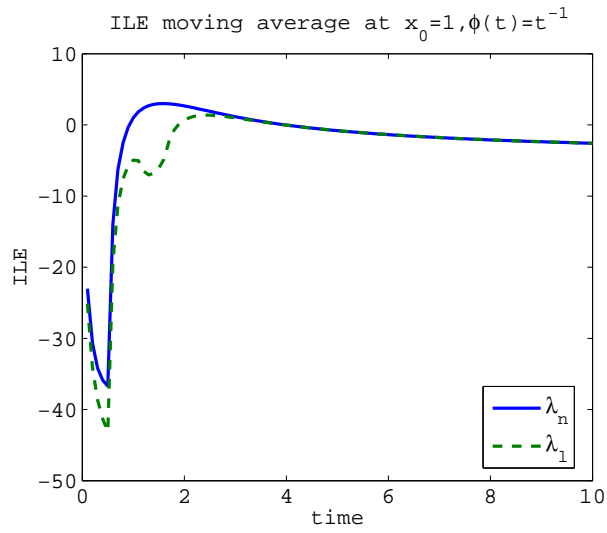


図 3.18: $x(t_0) = 1$ における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{t}$)

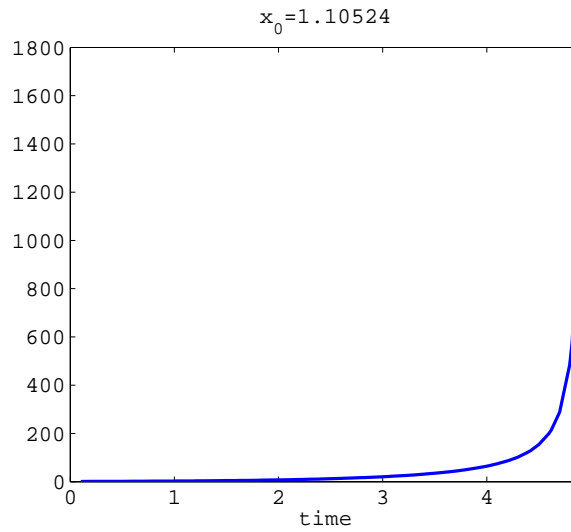


図 3.19: 応答波形 ($x(t_0) = 1.10524$)

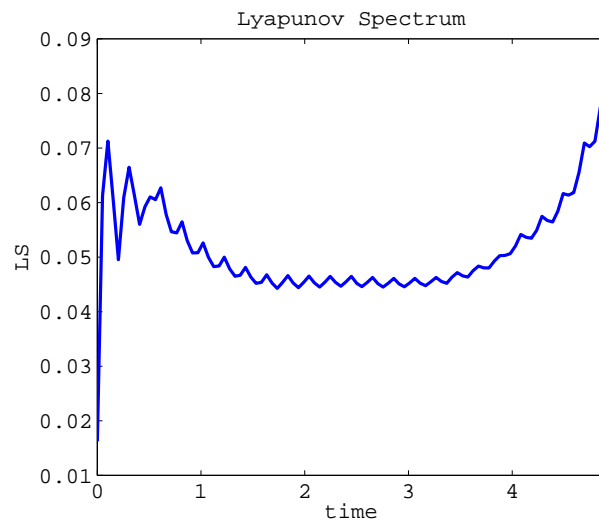


図 3.20: リアプノフスペクトラム ($x(t_0) = 1.10524$)

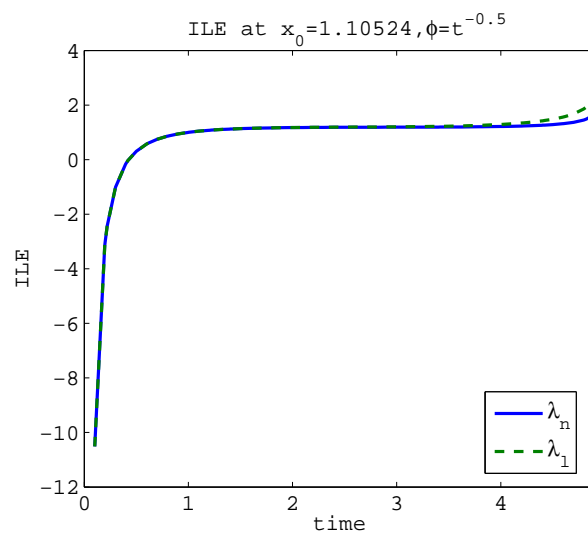


図 3.21: $x(t_0) = 1.10524$ における $\text{ILE}(\phi = \frac{1}{\sqrt{t}})$

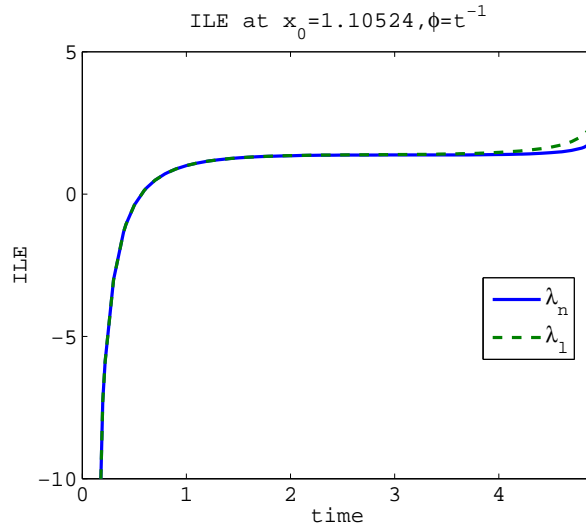


図 3.22: $x(t_0) = 1.10524$ における ILE($\phi = \frac{1}{t}$)

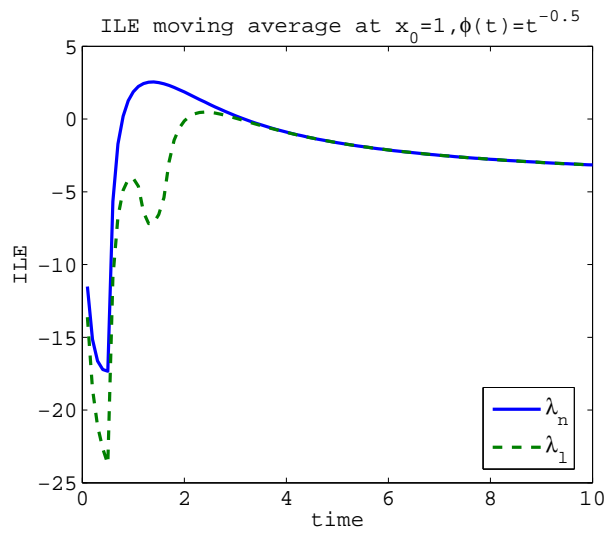


図 3.23: $x(t_0) = 1.10524$ における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

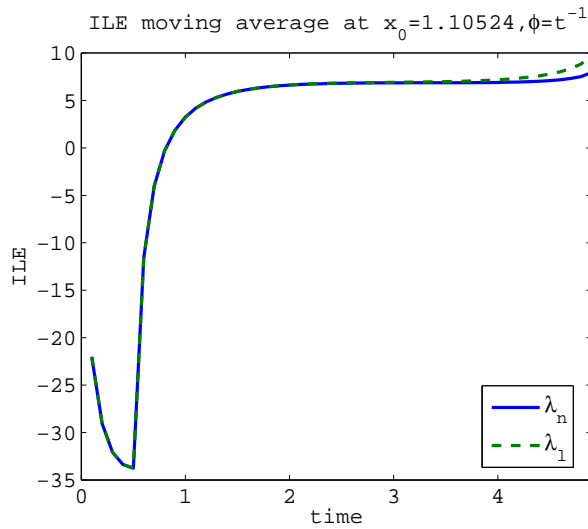


図 3.24: $x(t_0) = 1.10524$ における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{t}$)

3.2.3 ゼロを固有値に持つシステム

次のような平衡点 $x = 0$ を持つ局所安定なシステムを考える .

$$\dot{x} = -x^3 + x^4 \quad (3.4)$$

このシステムを線形化した際の固有値はゼロである . このシステムに対し次のパラメータおよび基準関数を用いて検証を行う .

$$x(t_0) = 0.8, t_0 = 0.1$$

$$(\phi_1(t), \phi_2(t)) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

図 3.25 はシステムの応答を, 図 3.26 はその応答に対するリアプノフスペクトラムを表している . また図 3.27 ~ 図 3.30 はシステムの応答に対する ILE についてまとめてあり, それぞれの応答に対して次の順番に表す .

1. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
2. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
3. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE の移動平均 $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$
4. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$

前項の $S1$ と同じく対象のシステム自体はゼロに収束するシステムであり，リアプノフスペクトラム・瞬時リアプノフ指数ともに非正値を示すが図.3.14,3.15 と同様にリアプノフスペクトラムが非正値をとり続ける時刻と瞬時リアプノフ指数がそれを満たす時刻を比較すると瞬時リアプノフ指数のほうが優れており，特に今回のシステムについては初期時刻から非正値をとり続けていることが確認できた．

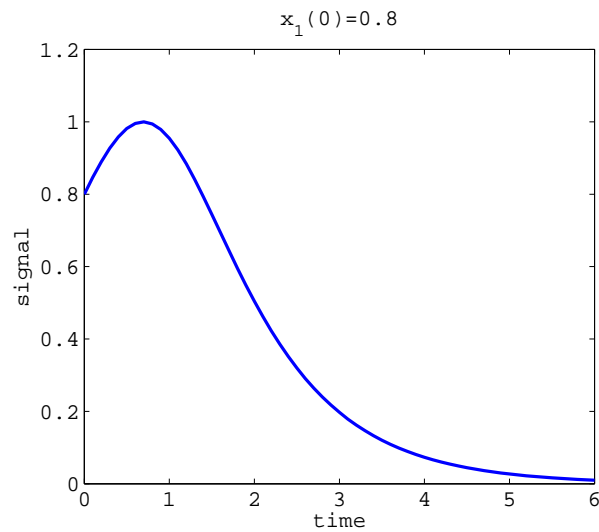


図 3.25: 応答波形

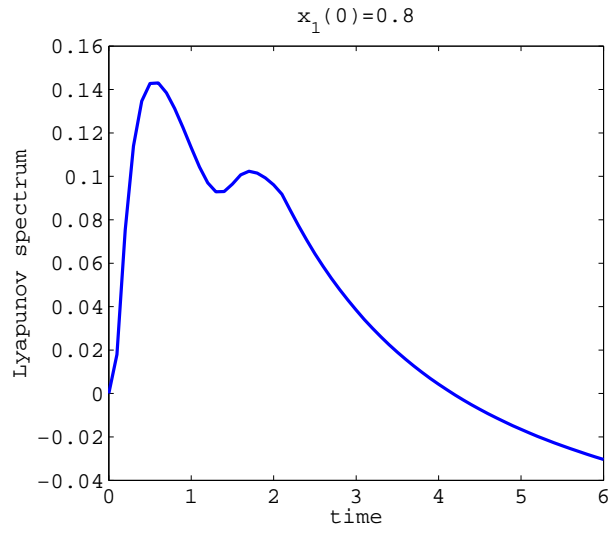


図 3.26: リアプノフスペクトラム

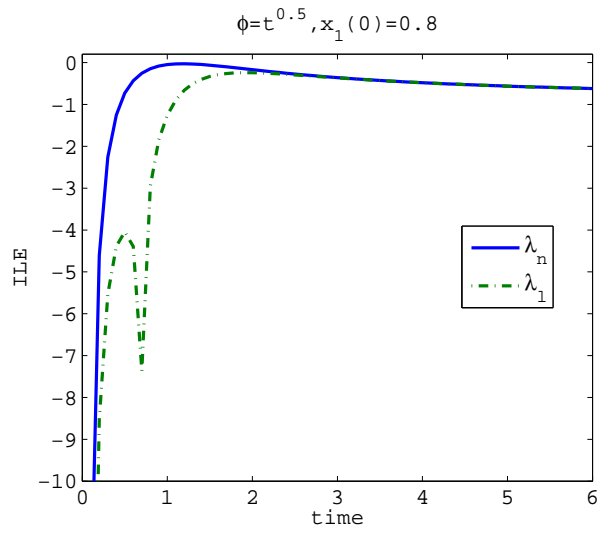


図 3.27: $\text{ILE}(\phi = \frac{1}{\sqrt{t}})$

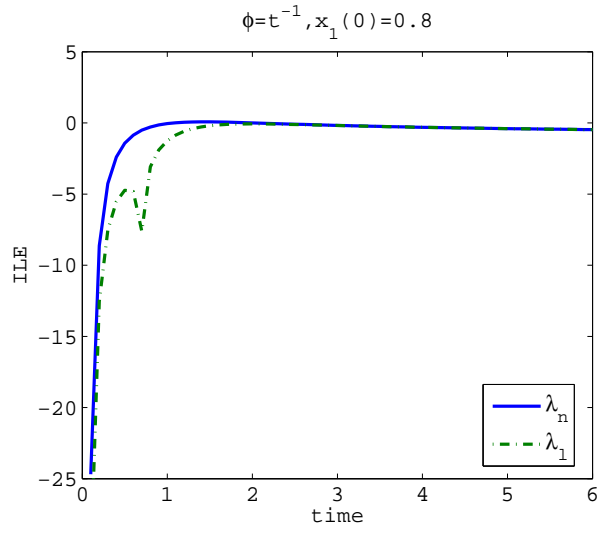


図 3.28: $ILE(\phi = \frac{1}{t})$

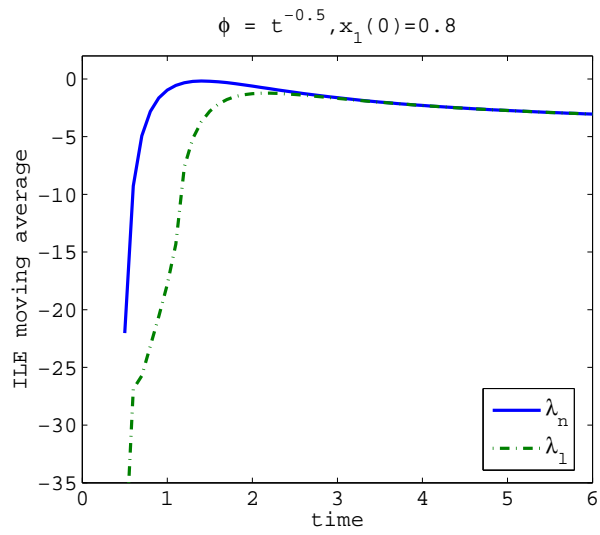


図 3.29: ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

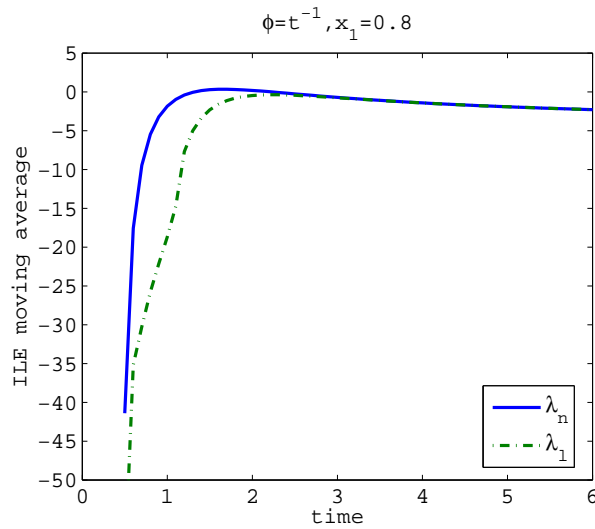


図 3.30: ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{t}$)

3.2.4 ダフィンシステム

次のようなダフィン方程式を考える [8]

$$\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 - kx_1(1 - x_1^2) = A \cos \omega t$$

システムのダイナミクスは次のように表すことができる .

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 + kx_1(1 - x_1^2) + A \cos x_3 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= \omega = f_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

一般化したフローの発散は減衰係数の負の値に等しくなる , つまり

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = -c$$

である . このシステムに対し ILE を適用していく . 使用するパラメータは以下の通りである .

$$A = 0.4, k = 1, \omega = 1, c = 0.5$$

$$x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_3(t_0) = 0, t_0 = 0.1$$

$$(\phi_1(t), \phi_2(t)) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

図 3.31,3.32 はシステムの応答を, 図 3.33,3.34 は応答に対するリアプノフスペクトラムを表している. また図 3.35 ~ 図 3.42 はシステムの応答に対する ILE についてまとめてあり, それぞれの応答に対して次の順番に表す.

1. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
2. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
3. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE の移動平均 $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$
4. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$

対象のシステムがカオス状態等の不規則な振動を繰り返す場合, リアプノフスペクトラムは正值を示し (図.3.33,3.34), 瞬時リアプノフ指数は正と負の領域を不規則に移動することが確認できた. また図.3.42 において λ_l が振動しながら正值に収束することが確認できたため, 基準関数の収束速度をより早いものにより, リアプノフスペクトラムと同様の性能が得られることが考えられる. また, Shin らの一般化瞬時リアプノフ指数は減衰係数 c の負の値に収束する [8]. このことから一般化瞬時リアプノフ指数では判定できないようなシステムでも正常に判定ができることがわかる.

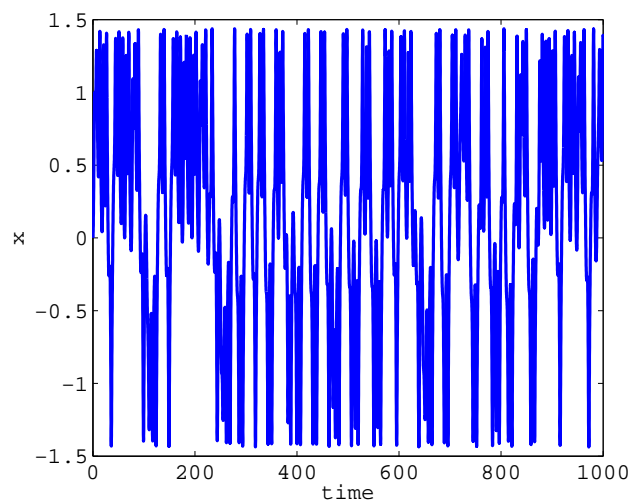


図 3.31: 応答波形

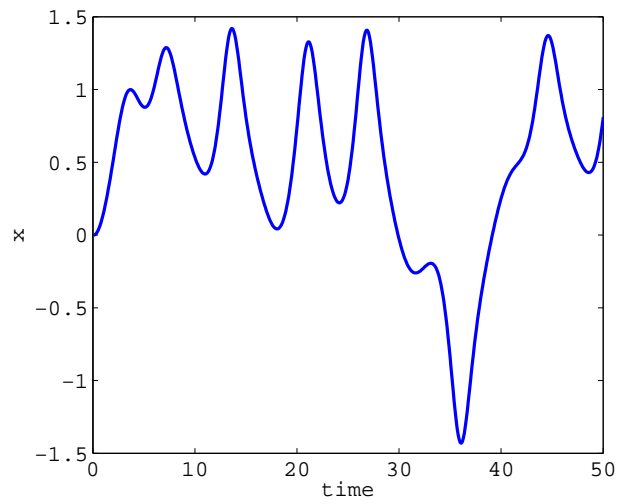


図 3.32: 応答波形 (short time)

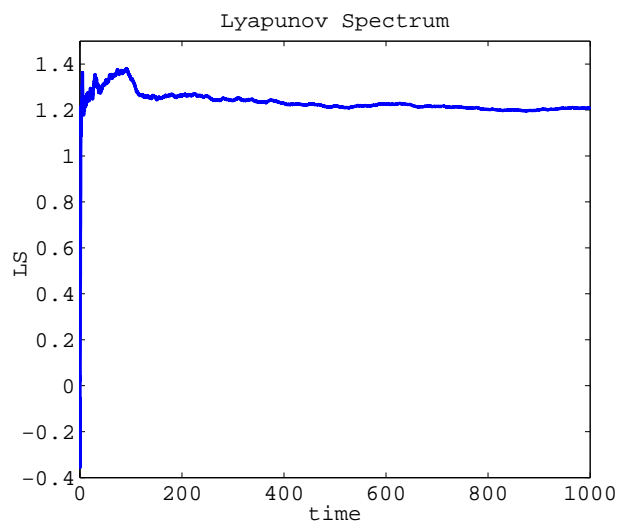


図 3.33: リアプノフスペクトラム

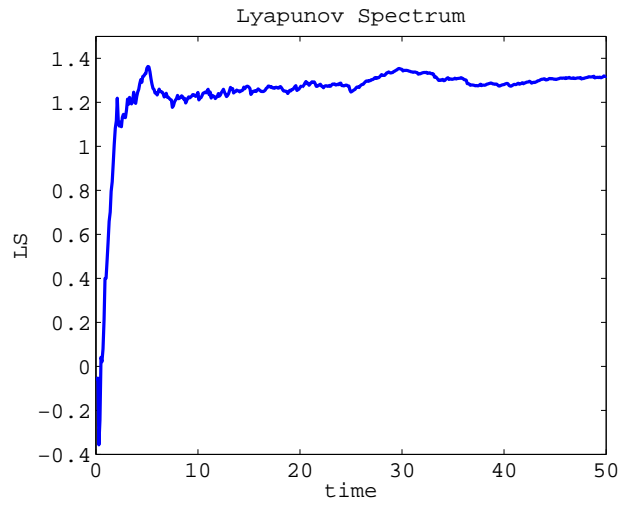


図 3.34: リアプノフスペクトラム (short time)

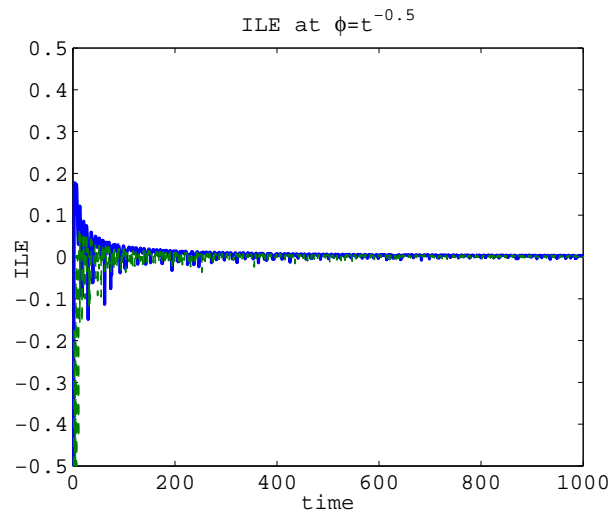
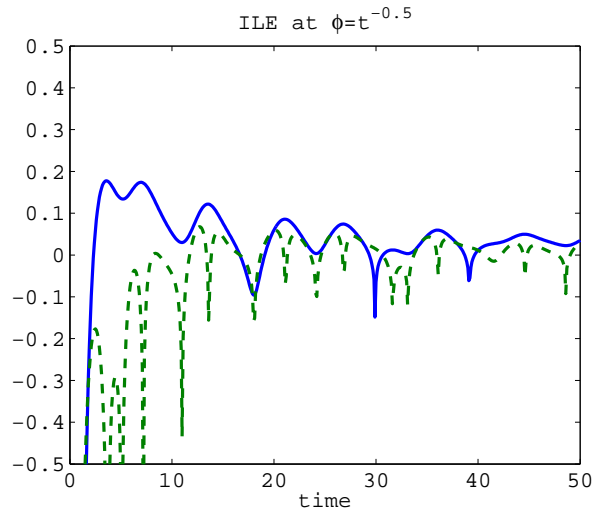
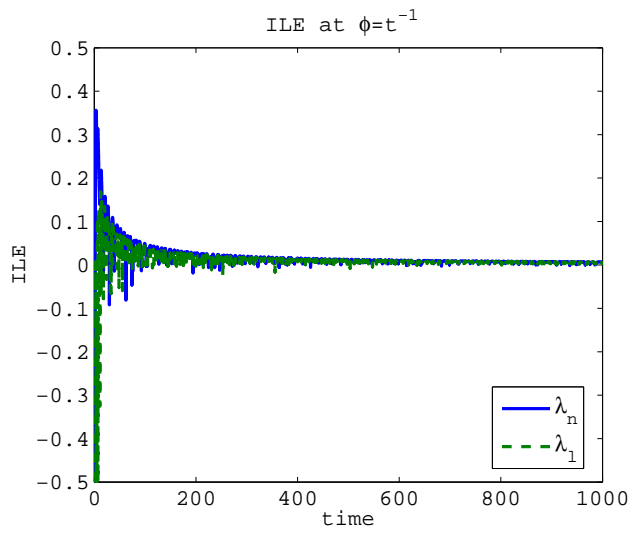


図 3.35: $ILE(\phi = \frac{1}{\sqrt{t}})$



☒ 3.36: ILE($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$, short time)



☒ 3.37: ILE($\phi = \frac{1}{t}$)

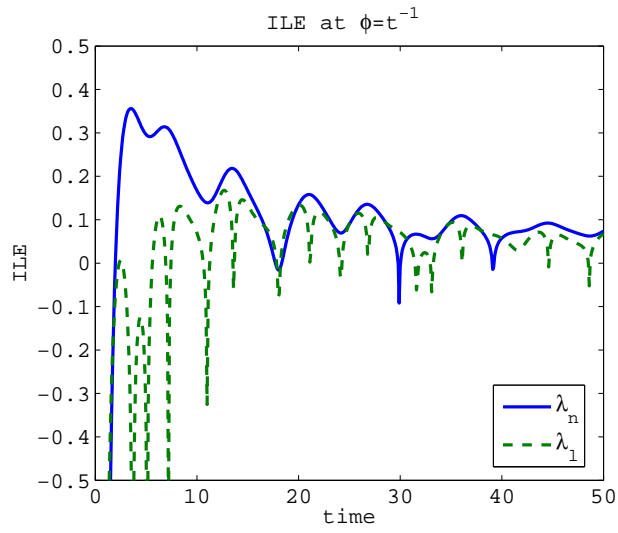


図 3.38: ILE($\phi = \frac{1}{t}$), short time

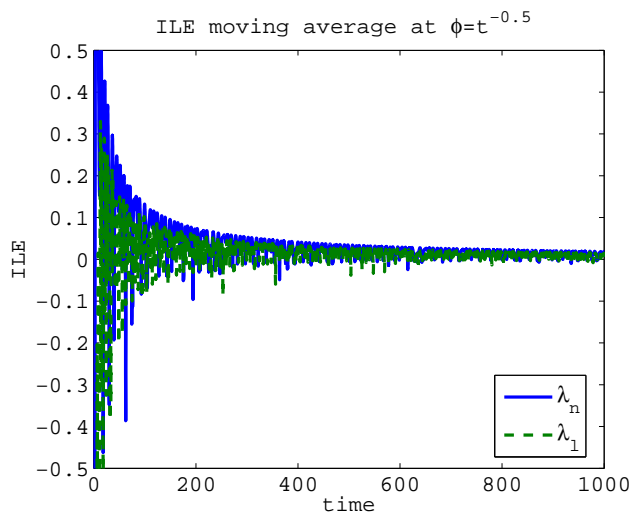


図 3.39: ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

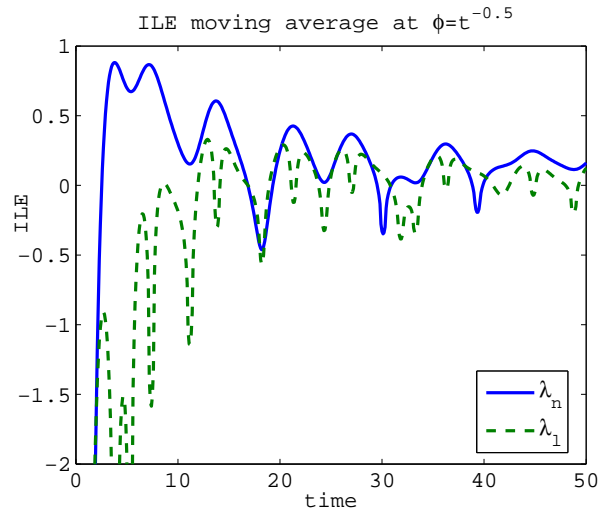


図 3.40: ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$, short time)

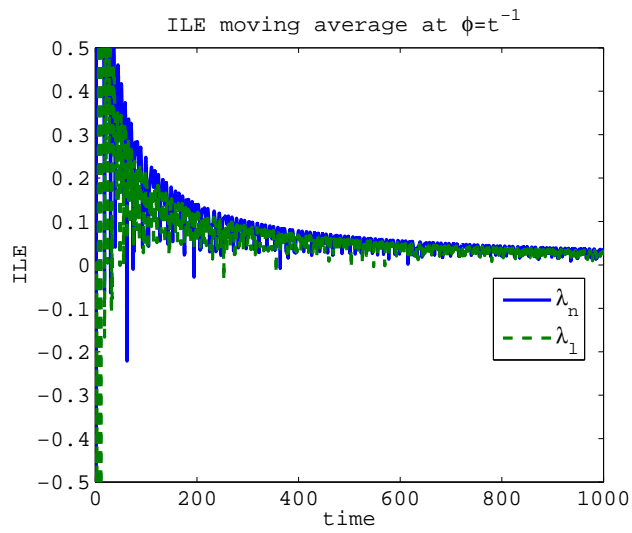


図 3.41: ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{t}$)

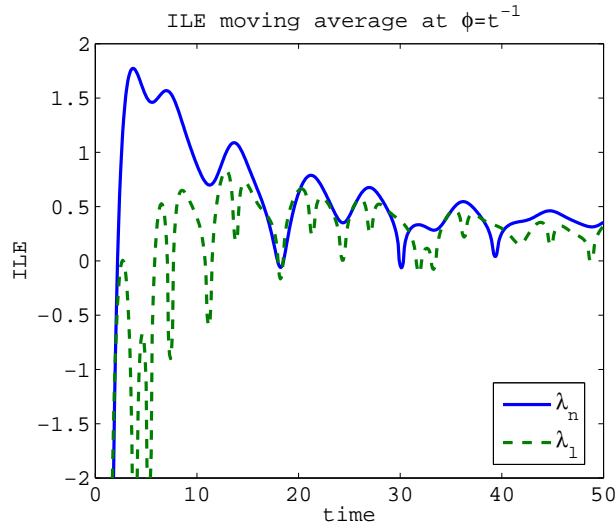


図 3.42: ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{t}$, short time)

3.3 Lorenz システムを用いた通信系の同期判定

3.3.1 通信モデルの記述

本節では Huang[3] らの提案する未知パラメータを含む Lorenz システムを用いた通信系に対するカオス同期の同期判定を対象とする。ただし，パラメータ更新則は Huang らのものを改善し，完全同期が達成できるパラメータ更新則 [9] を用いている。Lorenz システム (送信器) は次式で表される [3]。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_1x_3 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 \end{aligned}$$

ただし, σ, r, b は未知パラメータとする。このシステムに対し, 次のようなオブザーバ (受信器) を構成する [3]。

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 35(y_2 - y_1) + u_1(x, y, \hat{\sigma}, \hat{r}, \hat{b}) \\ \dot{y}_2 &= -7y_1 - y_1y_3 + 28y_2 + u_2(x, y, \hat{\sigma}, \hat{r}, \hat{b}) \\ \dot{y}_3 &= y_1y_2 - 3y_3 + u_3(x, y, \hat{\sigma}, \hat{r}, \hat{b}), \end{aligned}$$

$$u_1 = (\hat{\sigma} - 35)(x_2 - x_1), u_3 = -e_1x_2 + (3 - \hat{b})x_3,$$

$$u_2 = -28e_1 - 30e_2 + e_1x_3 - 29x_2 + (\hat{r} + 7)x_1$$

ここで, e_1, e_2, e_3 は同期誤差で, $e_i = y_i - x_i, i = 1, 2, 3$ である. パラメータ更新則は次式のように選ぶと, 2つのシステムは同期する [9].

$$\dot{\hat{\sigma}} = (x_1 - x_2)e_1, \dot{\hat{r}} = -x_1e_2, \dot{\hat{b}} = x_3e_3$$

3.3.2 数値例

内部パラメータを $(\sigma, r, b) = (10, 28, \frac{8}{3})$ とし, 初期条件をつぎのようにおきシミュレーションを行った. またそれぞれの変数の挙動についてリアプノフスペクトラムと ILE の算出を行った.

$$(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0)) = (2, 3, 7)$$

$$(y_1(t_0), y_2(t_0), y_3(t_0)) = (10, 14, 12)$$

$$(\hat{\sigma}(t_0), \hat{r}(t_0), \hat{b}(t_0)) = (10.5, 10, 5)$$

図 3.43 は各変数の 3 次元位相図を表しており, 図 3.44 ~ 3.46 は各変数の時間に対する応答である

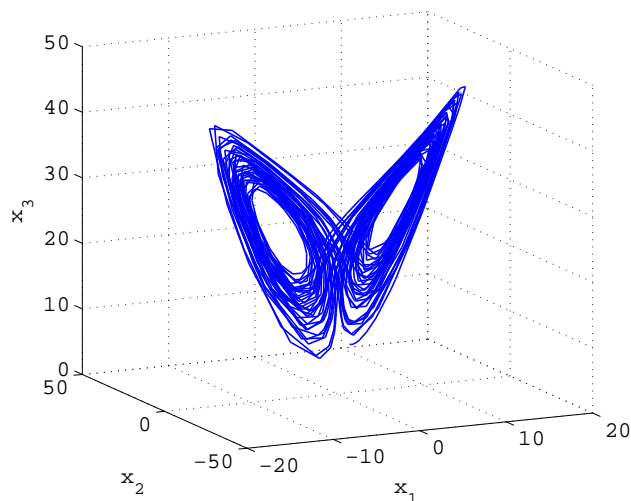


図 3.43: x_i の信号応答 ($i = 1, 2, 3$)

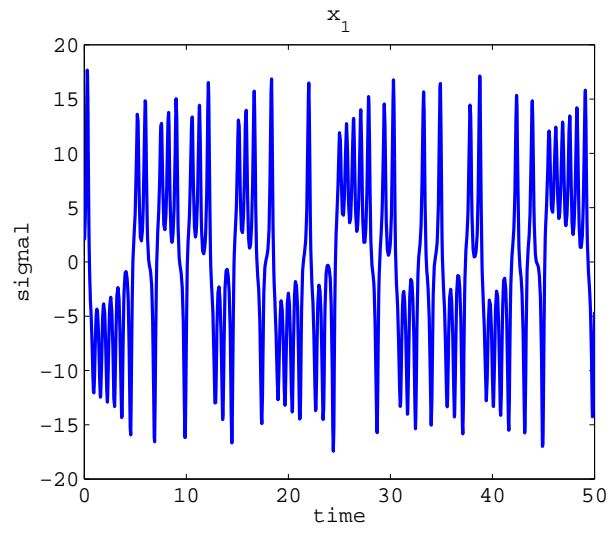


図 3.44: x_1 の信号応答

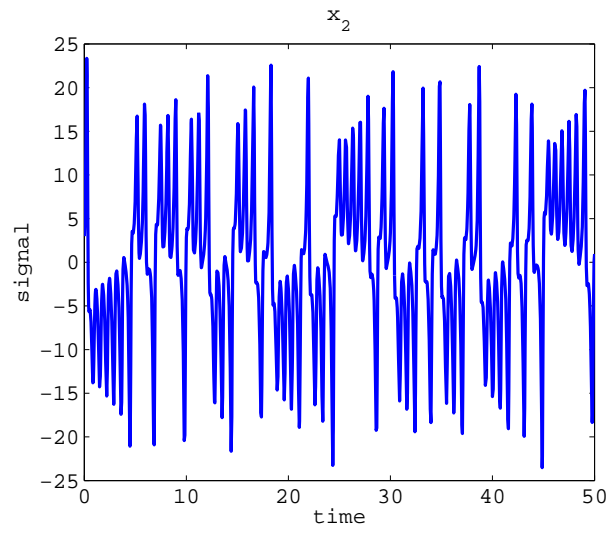


図 3.45: x_2 の信号応答

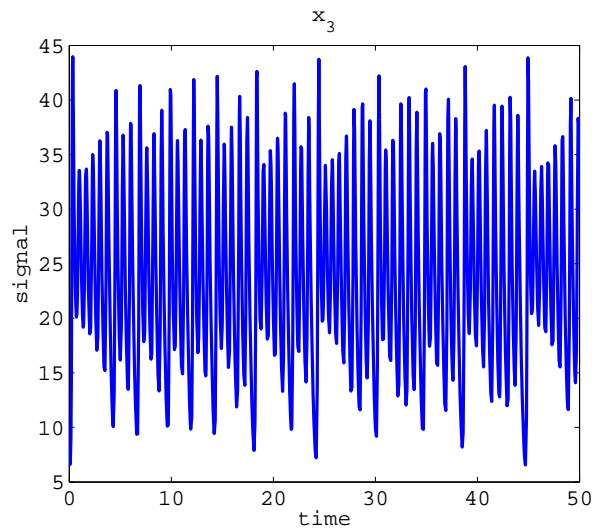


図 3.46: x_3 の信号応答

図 3.47 ~ 3.59 は各変数の時間に対する応答である．図 3.48, 3.54, 3.60 は各状態変数の応答に対するリアプノフスペクトラムを表している．また図 3.49 ~ 図 3.52, 図 3.55 ~ 図 3.58, 図 3.61 ~ 図 3.64 は各変数の応答に対する ILE についてまとめてあり, それぞれの応答に対して次の順番に表す．

1. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
2. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
3. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE の移動平均 $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$
4. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$

どちらとも正値を示しており, カオス判別における精度・速さは同等といえる．

また図 3.65 ~ 3.68 はシステムとオブザーバの同期度を表しており, 図 3.65 ~ 3.67 はそれぞれ対応する変数間の同期度に適用し同期している場合, 図 3.68 は対応しない変数との同期度について適用した．同期している場合の値は 0 近辺, そうでない場合は正の値を示しており, 意図した結果を示しているのが分かる．

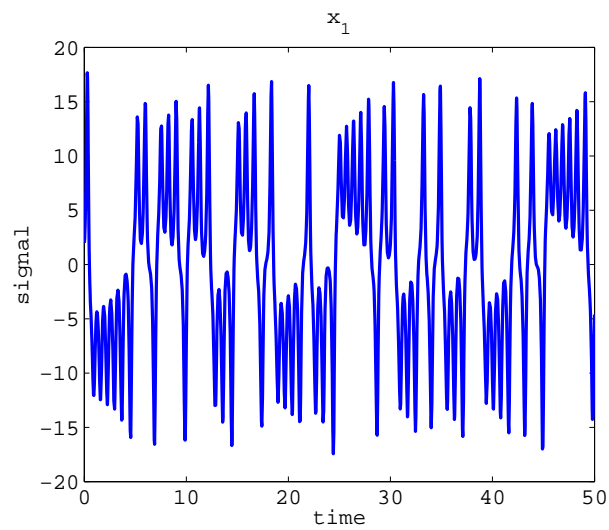


図 3.47: x_1 の信号応答

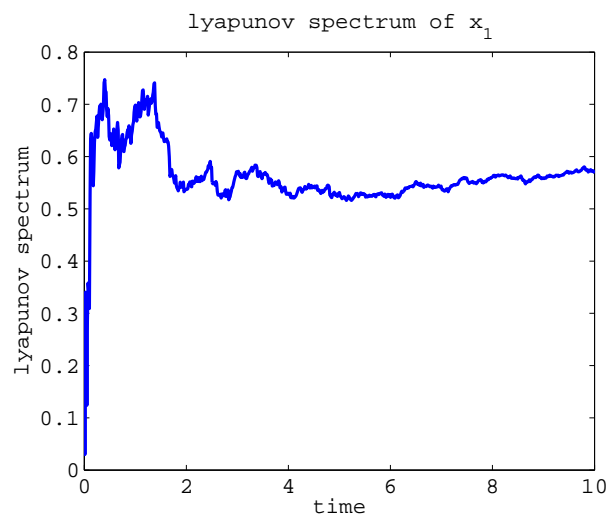
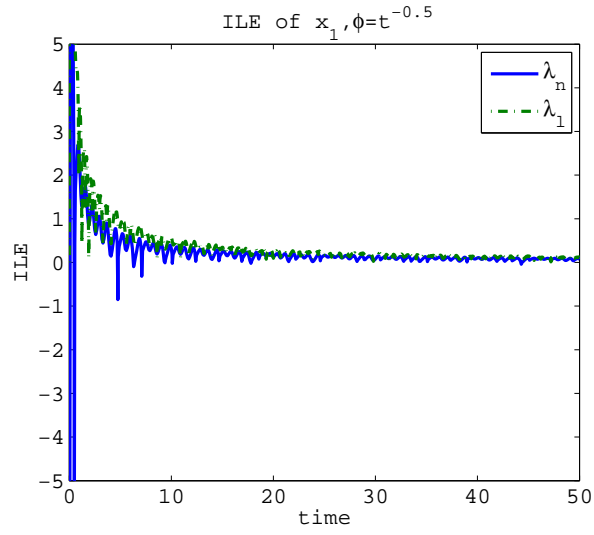
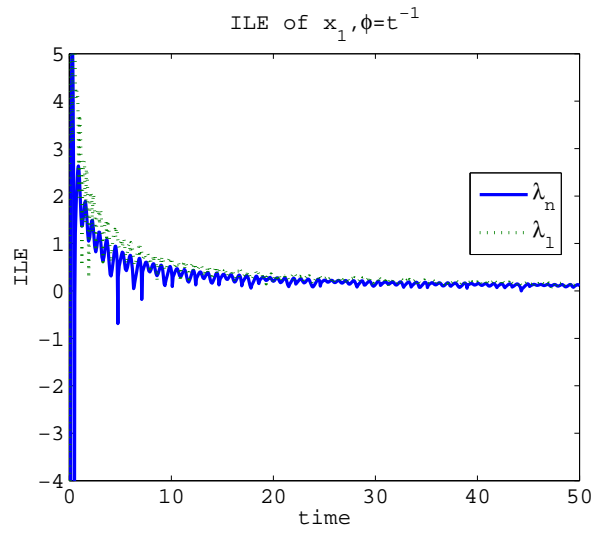


図 3.48: x_1 のリアプノフスペクトラム



☒ 3.49: $x_1 \mathcal{O} \text{ ILE}(\phi = \frac{1}{\sqrt{t}})$



☒ 3.50: $x_1 \mathcal{O} \text{ ILE}(\phi = \frac{1}{t})$

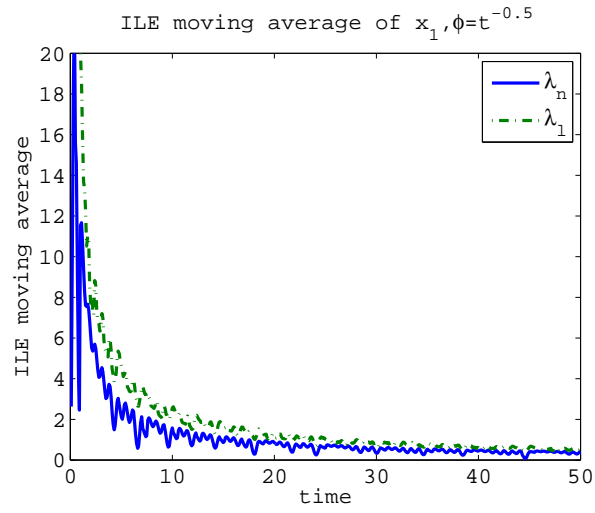


図 3.51: x_1 における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

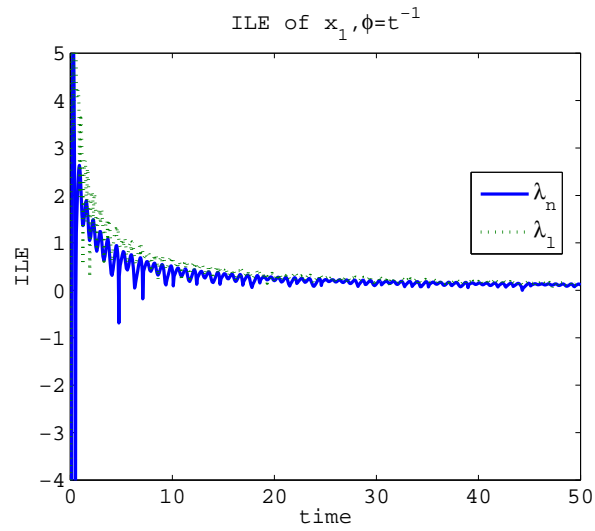


図 3.52: x_1 における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{t}$)

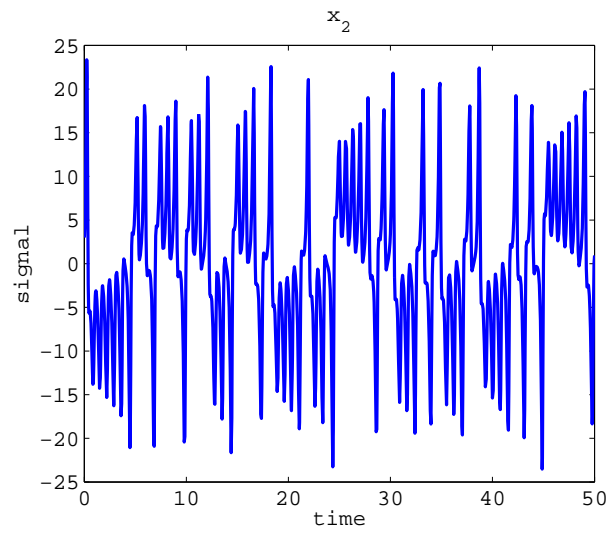


図 3.53: x_2 の信号応答

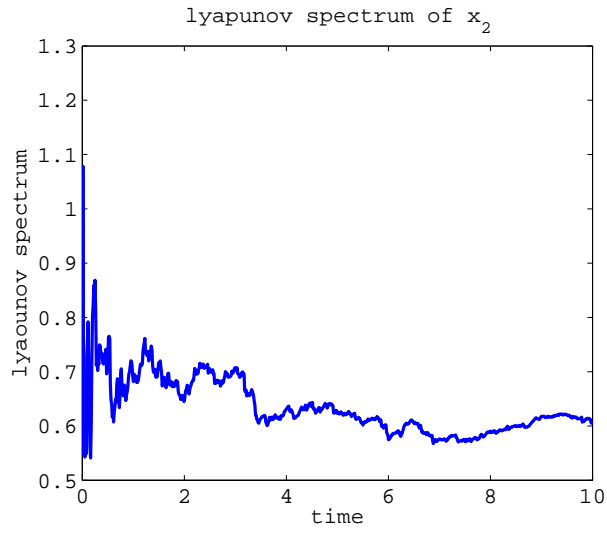


図 3.54: x_2 のリアプノフスペクトラム

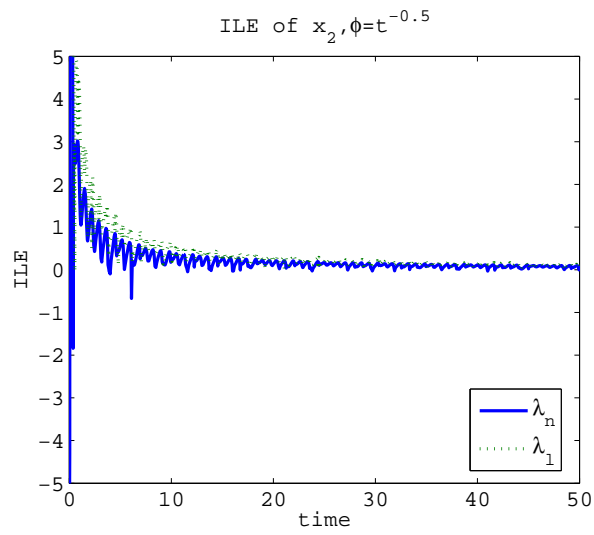


図 3.55: x_2 の ILE($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

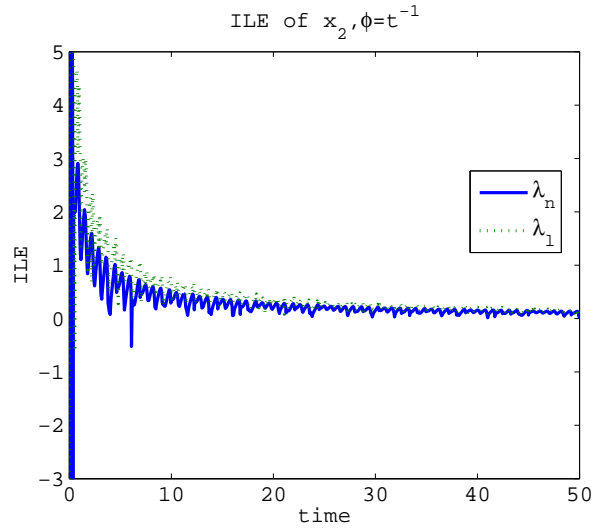


図 3.56: x_2 の ILE ($\phi = \frac{1}{t}$)

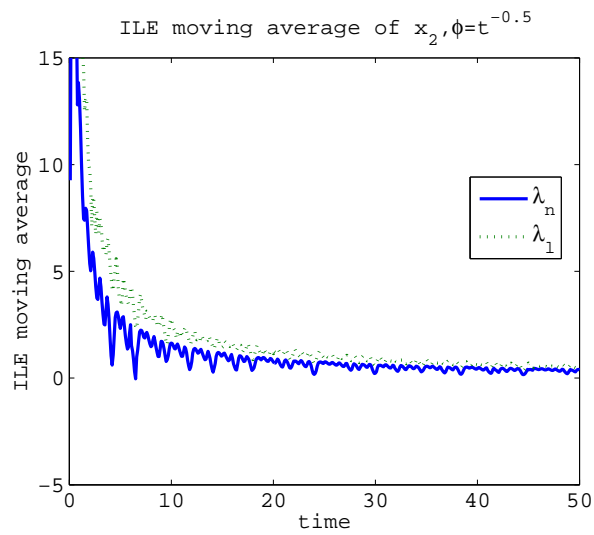


図 3.57: x_2 における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

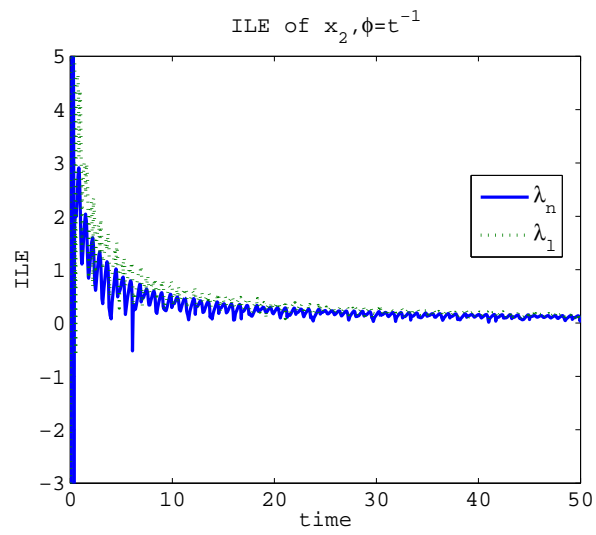


図 3.58: x_2 における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{t}$)

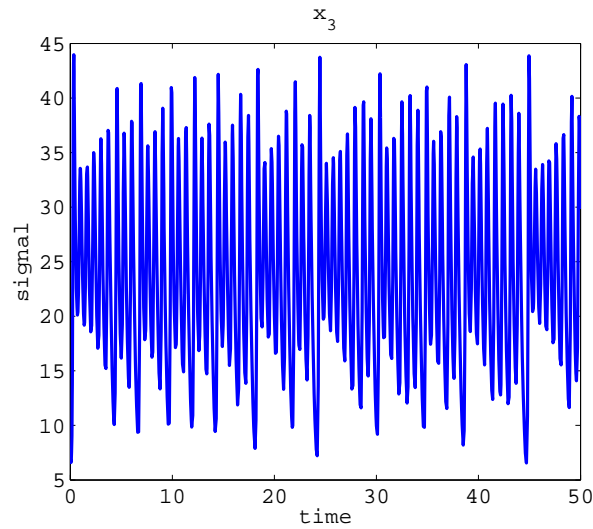


図 3.59: x_3 の信号応答

3.4 まとめ

本章では既知の非線形システムに対し瞬時リアプノフ指数を適用し，リアプノフスペクトラムと比較することによりその性能についての検証を行った．その結果，提案した減衰/成長率を用いたILEはリアプノフスペクトラムと同等の性能を示し，システムによってはリアプノフスペクトラムよりも短い時間で判定できることが確認できた．また一般化瞬時リアプノフ指数と比較した際も一般化瞬時リアプノフ指数が判定できないようなシステムを判定できるような場合があることを示した．

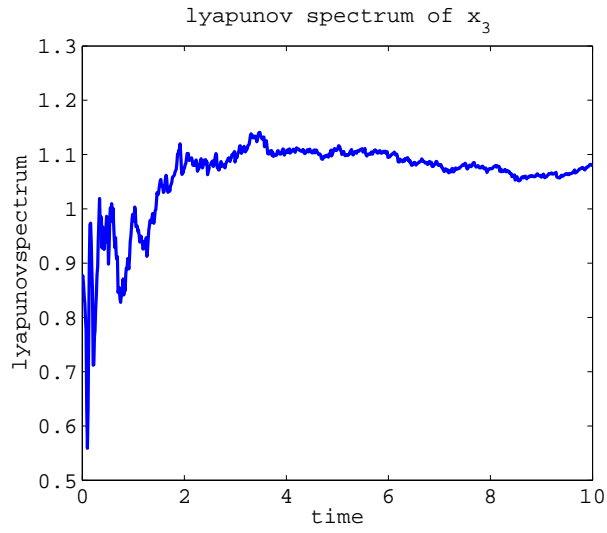


図 3.60: x_3 のリアプノフスペクトラム

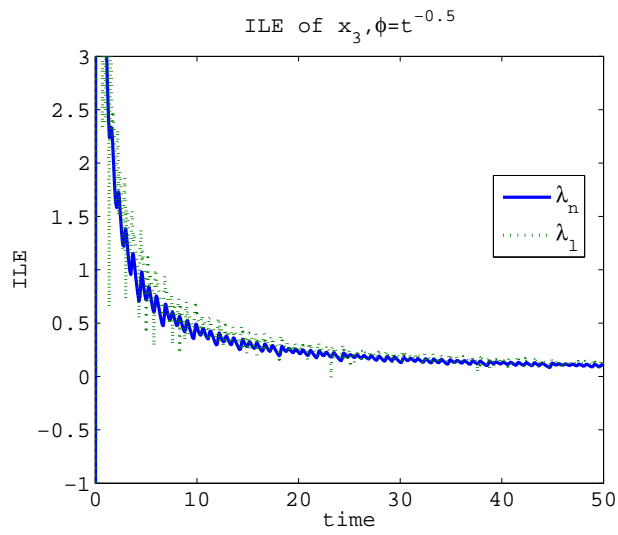


図 3.61: x_3 の ILE($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

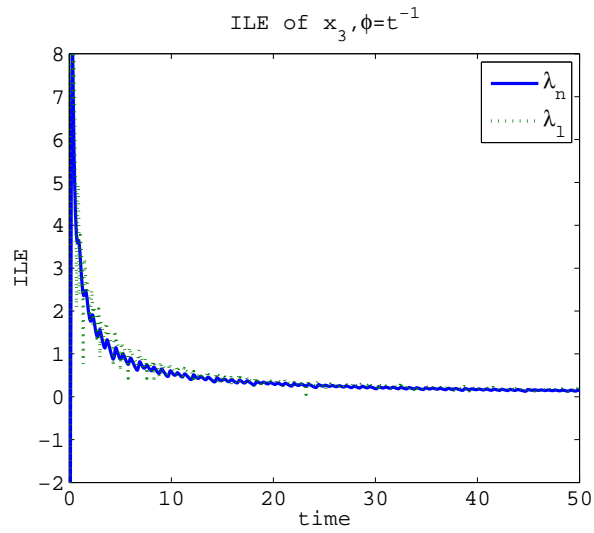


図 3.62: x_3 の ILE ($\phi = \frac{1}{t}$)

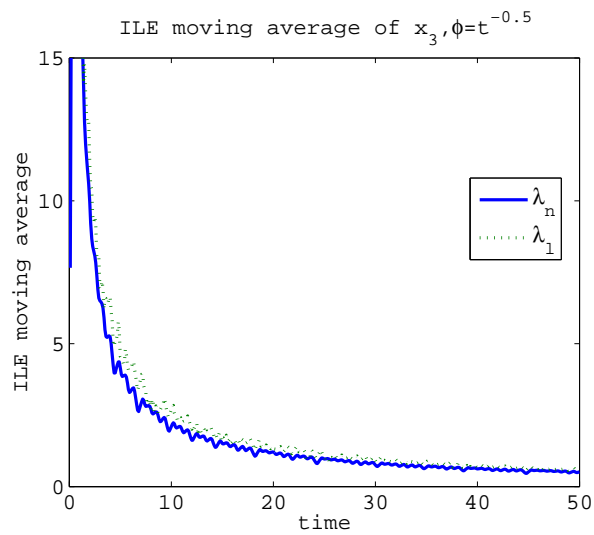


図 3.63: x_3 における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

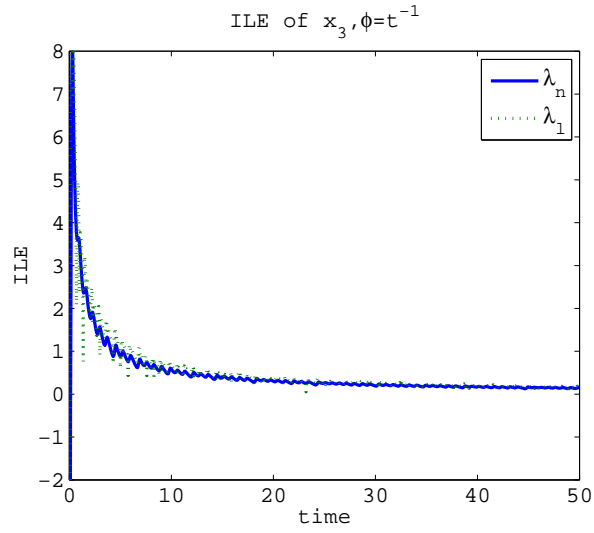


図 3.64: x_3 における ILE の移動平均 ($\phi = \frac{1}{t}$)

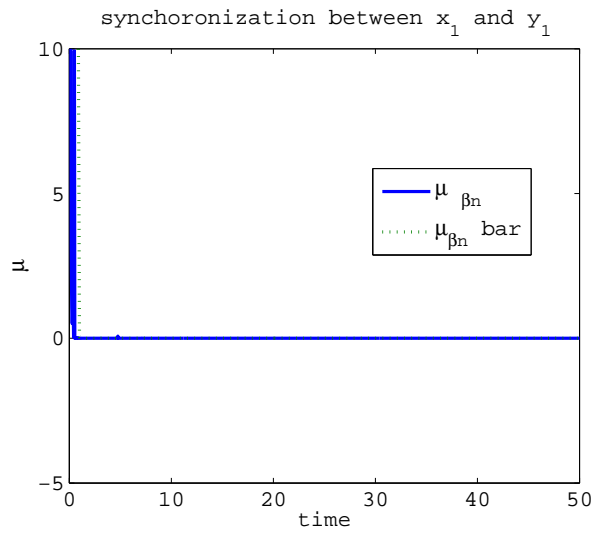


図 3.65: x_1 と y_1 の同期度

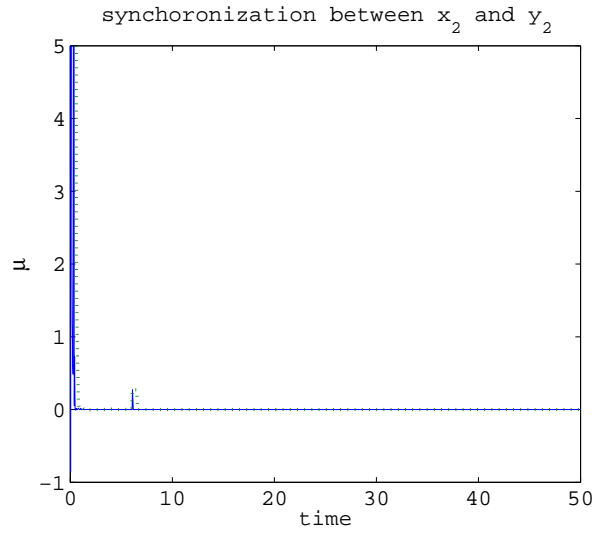


図 3.66: x_2 と y_2 の同期度

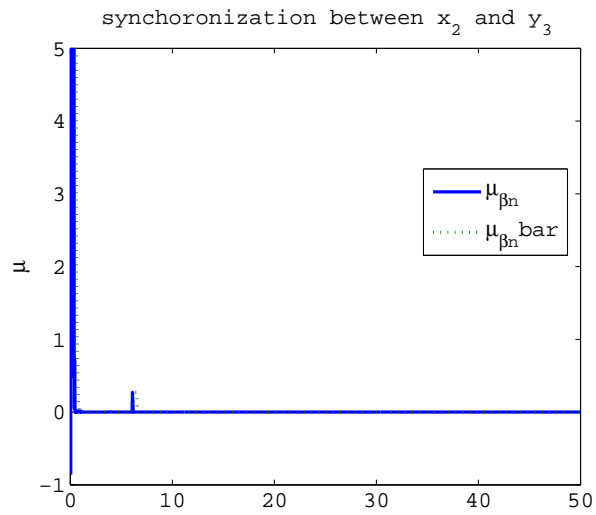


図 3.67: x_3 と y_3 の同期度

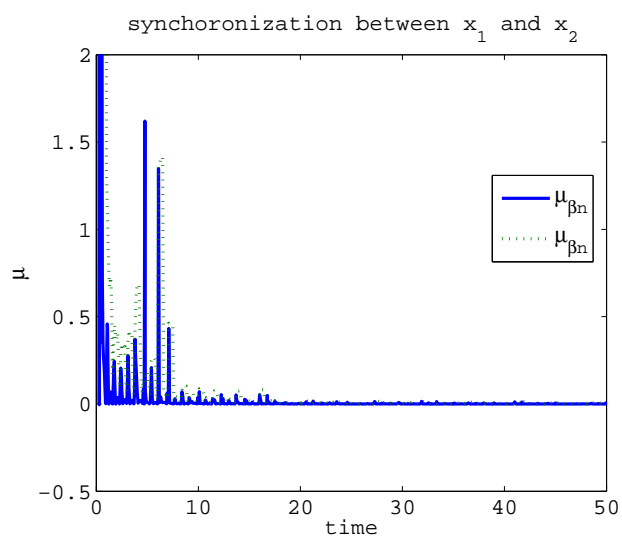


図 3.68: x_1 と x_2 の同期度

第4章 生体システムの状態推定

4.1 はじめに

前章ではいくつかのシステムを挙げ、従来提案されているリアプノフスペクトラムとILEの性能を比較することにより、リアプノフスペクトラムより早い時間でILEが特徴づけを行えるケースを示した。次に非線形系の振る舞いの一例として生体システムの状態推定問題に適用することにより性能の検証を行う。制御理論におけるオブザーバによる状態推定は、制御理論からは誤差システムの安定化問題になり、非線形力学系からみると、2つのシステム（1つは制御対象、もう1つはオブザーバ推定器）の同期問題として捉えることができる。CAMとHRニューロンのような生体システムの場合に、解析的に安定性を証明することが難しいことから、ILEを用いた同期度からオブザーバの状態推定性能を定量的に評価することを提案する。また、CAMとHRニューロンのような生体システムの解軌道の特徴づけについても、ILEを用いて行う。そこで本章ではまずLorenzシステムを用いた同期問題および、CAM植物とHindmarsh-Roseニューロンモデルの内部状態推定問題について述べ、次章でILEの適用結果を示していくことにする。

4.2 HR ニューロンモデルへの適用

本節では Hindmarsh-Rose ニューロンモデル (HR ニューロンモデル) の内部パラメータ・外部入力電流推定問題に瞬時リアプノフ指数を適用する．推定問題には Zhang らの多入出力時変オブザーバを基にオブザーバの構成を行う．今回 HR ニューロンモデルの発火パターンについてなだらかな応答を行う静止期と激しい発火を繰り返すバースト期を交互に繰り返す tonic bursting と発火状態のみを示す tonic spiking に注目し ILE をもちいて発火パターンの特定が可能かも検証する．また HR ニューロンモデルの各状態変数はヘテロクリニック軌道の応答を示し，他節の各応答と比較することにより瞬時リアプノフ指数の性能を検証する．

4.2.1 ニューロンの活動について

神経細胞は活動電位を起こし，それらが互いにネットワークを組み複雑な連携をとっている．一般に十分大きな定常電流を与えると，活動電位は周期的になる．Hodgkin-Huxley モデルや FitzHugh-Nagumo モデルでも定常負荷電流により活動電位が繰り返し発火する．しかし，多くの細胞タイプはより複雑な挙動であるバースティング (bursting, 群発) 現象を示す．バースティングは，膜電位がゆっくり変化する静止期と周期的なバースト期の繰り返す現象であり，多くの異なる細胞タイプから得られた典型的な現象である．同期したニューロンの発火は，ニューロンの信号伝達と符号化に部分的に関係していると考えられてきた．皮質処理 (cortical processing) における関連性については議論の余地があるが，同期現象の存在は嗅覚系 (olfactory system) あるいは海馬域 (hippocampal region) のような特定の部位で見られた．Hindmarsh and Rose[24],[25] などは，生物物理学的機構と実験データのもとに基づいたモデルに対して，その重要な定性的性質は保持しながら解析や理解が容易な多項式モデルを構築している．バースティングの先駆的研究が Rinzl によりなされている．Rinzl は膵臓の β -細胞に対する最初の生物物理学的なモデルを提案し，その非線形ダイナミクスに基づいてバースティング現象を説明した．これ以降さまざまな研究がなされているが，バースティングをもたらす機構についての統一的理解は存在しない．現実には多くの細胞タイプにおいてバースティングは細胞レベルで生じるのか，あるいは多くの細胞の電氣的なネットワークによって生じるのかさえもはっきりしていない．たとえば，膵臓の β -細胞のバースティングは，単一の孤立した細胞ではたいてい起きず，無傷のランゲルハンス島やギャップ結合で結合した β -細胞集団でしか起きないことがわかっている．バースティングモデ

ルには、主に2つがある。

- モデル1:一般的に細胞内カルシウム濃度の潜在的な遅い振動がバースティングを引き起こすという仮定に基づくもの。
- モデル2:近年の実験結果(カルシウムイオンはおそらくバースティングをもたらすような遅い変数ではない)から、カルシウム以外の別の機構によって潜在的な遅い振動が起きるという考えに基づくもの。

本章では、バースティングの初期に提案されたモデルを用いて、Rizelの解析手法を紹介する。

4.2.2 膵臓 β -細胞のバースティング:Hodgkin-Huxleyモデル

膵臓の連鎖反応をまとめると、次のようになる。

1. 膵臓ランゲルハンス島の β -細胞はブドウ糖に応答してインスリンを分泌する。
2. インスリンは、筋肉、肝臓、脂肪組織のような標的組織に作用してブドウ糖の取り込みや消費利用の増加を引き起こす。
3. ブドウ糖の血中レベルが低下するとインスリン分泌は止まり、組織はその代わりに自身の貯蔵エネルギーを使い始める。

このような調節が阻害されると、糖尿病を引き起こす。電氣的バースティングは、細胞からのインスリン放出における重要な(しかし独占的ではない)役割を演じていると考えられている。ここでは、単一細胞と細胞クラスタにおけるバースティング電気活動に対するモデルを考える。

バースティングモデル:Atwaterらが最初のモデルを実験データに基づいて提案し、Chayらが数学的モデルを展開した。数学モデルはバースティング過程の本質と考えられるいくつかの過程だけからなっており、細胞の多くの特徴を除外しているにもかかわらず、バースティングの多くの基本的特徴の多くを体現できる。基本モデルは膜の電気回路モデル(イオン電流とキャパシタの並列接続回路モデル、ここではHodgkin-Huxleyモデルの K^+ および Na^+ イオン電流が K^+ および Ca^{2+} イオン電流に置き換わる)で、次の仮定がされている。

1. Ca^{2+} 依存性 K^+ チャンネルが存在し，そのコンダクタンス $g_{K,Ca}$ は， $[Ca^{2+}]=c$ の増加関数で次式で与えられる（カリウムイオンと Ca イオンに総合関係があり，それがコンダクタンスとして現れていることを意味している．）

$$g_{K,Ca} = \bar{g}_{K,Ca} \frac{c}{K_d + c} \quad (4.1)$$

2. 電位依存性 K^+ チャンネルが依存し，Hodgkin-Huxley モデルと同様に，コンダクタンス g_K がシグモイド的增加と指数関数的減少を示すようにするために導入された補助変数 n のべき乗でモデル化され，次式とおいている．

$$g_K = \bar{g}_K n^4 \quad (4.2)$$

ただし，4乗は生理学的な理由でなく，実験データのフィッティング値からきており， n は次式の Hodgkin-Huxley モデルの微分方程式に従う．ここで電位 V^* だけずれ，オリジナルの Hodgkin-Huxley モデルの V が $V + V^*$ に書き換えられている．

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(1 - n) - \beta_n n \quad (4.3)$$

$$\alpha_n = 0.01 \frac{10 - V - V^*}{\left(\exp \frac{10 - V - V^*}{10}\right) - 1} \quad (4.4)$$

$$\beta_n = 0.125 \exp\left(\frac{-V - V^*}{80}\right) \quad (4.5)$$

3. Ca^{2+} チャンネルがあり，コンダクタンスは次式で与えられる．

$$g_{Ca} = \bar{g}_{Ca} m^3 h \quad (4.6)$$

ただし m, h は Hodgkin-Huxley モデルの微分方程式に従うが， V' だけ電位がずれている．モデルの微分方程式に従う．

これらのイオン電流ともれ電流を組み合わせると，次式の基本微分方程式が得られる．

$$C_m \frac{dv}{dt} = -(g_{K,Ca} + g_K)(v - v_k) - 2g_{Ca}(v - v_{Ca}) - g_L(v - v_L) \quad (4.7)$$

ただし， C_m は膜のキャパシタンスである．

次にバースティングを生む機構を埋め込む作業に移る．ブドウ糖が細胞質から Ca^{2+} の除去を調節すると仮定し，細胞内 Ca^{2+} の調節に対する方程式を加える．つまり，ブドウ糖が $[Ca^{2+}]$ (これを c とおいている) を低下させることによって，バースティング振動とそれに続くインスリン放出を導くと考える．簡単のため，ブドウ糖変数は入れずに定数 k_c がブドウ糖の増減割合に依存するとしたら $[Ca^{2+}]$ のダイナミクスを次式のように考えている．

$$\frac{dc}{dt} = f(-k_1 I_{Ca} - k_c c) \quad (4.8)$$

ただし， Ca^{2+} 電流は，

$$I_{Ca} = \bar{g}_{Ca} m^3 h (V - V_{Ca})$$

であり， k_1, k_c は定数である．定数 f は，フリー $[Ca^{2+}]$ の変化の全 $[Ca^{2+}]$ 変化量に対するスケール因子で，通常は小さい数である． k_c はブドウ糖濃度の増加関数であるが，ブドウ糖濃度はモデルの状態変数ではなく定数としている．したがって， k_c を模擬的に変えることにより，間接的にブドウ糖の増減の影響を，計算機シミュレーションにより調べることができる． k_c を増やしていくと (ブドウ糖の増加を意味する)，バースト相の期間が延びていき， $k_c=0.06$ で連続になる．特に， c には速い振動と遅い振動が存在し，遅い振動のピーク前後の期間にバースティングが起きることがわかった． c の遅い振動が発生する理由は，これがパラメータ f により Ca^{2+} 方程式の中に埋め込まれているためである． f が小さいほど Ca^{2+} 方程式はゆっくり時間発展するので，電位と Ca^{2+} 動態の相対的な発展速度が直接調節できる．したがって，2つの振動過程である遅い c の振動とそれに乗った速い電位振動の相互作用することにより，バースティングを引き起こしていることがわかる．シミュレーションにおいては，次のパラメータを用いている．

| | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| $C_m = 1[\mu F/cm^2]$ | $\bar{g}_{K,Ca} = 0.02[mS/cm^2]$ |
| $\bar{g}_K = 3[mS/cm^2]$ | $\bar{g}_{Ca} = 3.2[mS/cm^2]$ |
| $\bar{g}_L = 0.012[mS/cm^2]$ | $V_K = -75[mV]$ |
| $V_{Ca} = 100[mV]$ | $V_L = -40[mV]$ |
| $V^* = 30[mV]$ | $V' = 50[mV]$ |
| $K_d = 1[\mu M]$ | $f = 0.007$ |
| $k_1 = 0.0275[\mu M cm^2/nC]$ | $k_c = 0.02[ms^{-1}]$ |

4.2.3 放物型バースティング

バースティングのもうひとつの例は、アメフシラの R-15 ニューロンである。Plant(1981)[20]の研究により、このバースティング振動の数学的構造が β 細胞モデルと異なることがわかった。が β 細胞モデルは2つの速い変数と1つの遅い変数からなり、双安定性とヒステリシスループを持ち、振動相をとめるホモクリニック分岐は振動相を通じて周期の増加をもたらす。一方、Plantモデルは双安定性を示さず、2つの遅い変数が存在しそれら自身が振動する。ホモクリニック分岐は、振動相のはじめと終わりに通過するので、バースト振動の周期ははじめは長く、その後減少し、再び増加する。周期は大雑把にいて時間放物関数に従うので、放物型バースティング (parabolic bursting) と呼ばれる。

4.2.4 バースティング振動の分類スキーム

以上の2つのバースティング以外にも異なる機構バースティングが存在する。Rinzelがバースティング機構の分類法を提案し、その後、Bertramにより拡張されている。この分類法では、バースティング機構は3つのカテゴリに分けられる。

- 型: β 細胞モデルのようにヒステリシスと双安定性から生じるバースティング
- 型:放物型バースティングのように潜在的な遅い振動から生じるバースティング
- 型:亜臨海的なホップ分岐から生じるバースティング

4.2.5 細胞集団のバースティング

これまでの議論では、孤立した1個の隣接 β 細胞は、規則的にはバーストしないことが多いという都合の悪い事実を無視できている。そこで、細胞の集団化に注目する必要

がある．つまり，数千の細胞が集まってランゲルハンス島という組織になると，キャップ結合という電氣的結合が細胞間にできて，規則的なスパイクが見られるようになることがわかっている．分離された1つの β 細胞は非常に不規則に振る舞い，明確なバースティングを示さないので，バースティングの制御機構にこの細胞間結合の考慮は欠かせないものであることがわかる．

Atwater[4]は，単一細胞の振る舞いとクラスタ内細胞の振る舞いの違いを説明するために，ある定性的機構を提案した．彼らは，各細胞が少数のカルシウム感受性 $K^+(K-Ca)$ チャンネルを持ち，各チャンネルは高コンダクタンスであると考えた．休止期の V と $[Ca^{2+}]$ では， $K-Ca$ チャンネルはまれにしか開かないが，たった1つのチャンネルが開くだけで，細胞膜電位に十分な摂動を与えるほどの電流が流れる．このため，確率的なチャンネルの開閉により，観測にかかるほどのランダムな揺らぎが V に生じる．しかし，細胞はクラスタ中で電氣的に結合しており，チャンネル電流が細胞ネットワーク全体に分散するので，各 $K-Ca$ チャンネルが各細胞に与える効果は極めて小さい．個々のチャンネルの影響は小さいが，個々の細胞は多数の $K-Ca$ チャンネルの効果を集積するので，細胞間の結合が強まると，個々の細胞はクラスタ内のすべての $K-Ca$ チャンネルの効果を集積し，全体の振る舞いは規則的かつ決定論的になると考えることができる．

Sherman[22]とChay and Kang[23]は，始めに無限に強い結合を持つマルコフ過程に従う細胞集団(スーパー細胞と呼ぶ)を仮定し，クラスタサイズの増加に伴ってバースティングが規則的になっていくことを示した．

4.2.6 定性的バースティングモデル:HRモデル

Hindmarsh and Rose(1984)[24],[25]やPernarowski(1994)[26]は，前述した生物物理学的機構と実験データのもとに基づいたモデルに対して，その重要な定性的性質は保持しながら解析や理解が容易な多項式モデルを構築している．

ここでは，本研究で用いるHindmarsh and Roseモデル(HRモデルと呼ぶことにする)[24],[25]を紹介する．Fitzhugh-Nagumoモデルを改変して，長いスパイク間隔を持つ振動を引き起こすようにしたものがHRモデルである． v は興奮変数， ω は回復変数とし，次の微分方程式を考える．

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \alpha(\beta\omega - f(v) + I) \\ \frac{d\omega}{dt} &= \gamma(g(v) - \delta\omega)\end{aligned}$$

ただし, I は負荷電流, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数である. Fitzhugh-Nagumo モデルと同様に $f(v)$ は 3 次関数であるが, Fitzhugh-Nagumo モデルと違い, $g(v)$ は線形ではない. 実際に, ω ヌルクラインは v ヌルクラインに寄り添うように, 振動臨界点の左へと曲がっている. その結果, スパイクとスパイクの間の静止相では, リミットサイクル軌道がどちらもヌルクラインに近接するので, そこでは, $\dot{v}, \dot{\omega}$ 共に小さく, その結果, スパイク間隔は大きくなる.

この改変 Fitzhugh-Nagumo モデルを少し変えるだけでバースティングのモデルになる. ここでは, 双安定性を導入することにより, バースティングを起こすことを考える. そこで ω ヌルクラインが v ヌルクラインと 3 箇所で見切るように変更する. 新たに 2 つの交点を 2 つつくるには, 次のようにわずかな変形を行うだけでよい. 新しいモデル式を次式のようにおく.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \alpha(\beta\omega - f(v) + I) \\ \frac{d\omega}{dt} &= \gamma(g(v) + h(v) - \delta\omega)\end{aligned}$$

ただし, $h(v)$ はヌルクラインが 3 点で見切るようにとるものとする.

簡単化のため, 変数

$$\begin{aligned}T &= \gamma\delta t \\ x &= v \\ y &= \frac{\alpha\beta\omega}{\gamma\delta}\end{aligned}$$

とおき, 無次元化すると, 次式のようになる.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dT} &= y - \tilde{f}(x) \\ \frac{dy}{dT} &= \tilde{g}(x) - y\end{aligned}$$

ただし, 次のようにおいている.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \frac{\alpha f(x)}{\gamma\delta} \\ \tilde{g}(x) &= \frac{\alpha\beta(g(x) + h(x))}{\gamma\delta^2}\end{aligned}$$

\tilde{f} と \tilde{g} を適切に選ぶと, 双安定性を示す. 特に多項式を用いて, 次のようなモデルを用いることができる.

$$\frac{dx}{dT} = y - x^3 + 3x^2 + I$$

$$\frac{dy}{dT} = 1 - 5x^2 - y$$

これは、3つの平衡点、 $x_1 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ をもつことがわかる。 x_1 は安定ノード点 (静止状態), x_2 はサドル点, x_3 は不安定ノード点である。 x_3 は安定なリミットサイクルに囲まれている。そこで、静止状態からの摂動が安定多様体を超えるほど大きければ、軌道は安定なリミットサイクルに近づく。逆に小さい摂動では、系はすぐに静止状態へ向かう。これは、トリガー発火 (triggered firing) と呼ばれる。この双安定な相平面は、Rinzel らのモデルの特徴をシンプルに再現していることがわかる。バースティングを起こすためには、双安定性に加えて、双安定状態を往復させるような遅い変数が必要になる。そこで、遅い時間スケールで負荷電流を調節するような3番目の変数 z を導入することにより、以下のようなモデルが完成する。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x^3 + 3x^2 + I - z \\ \frac{dy}{dt} &= 1 - 5x^2 - y \\ \frac{dz}{dt} &= r(s(x - x_1) - z) \end{aligned}$$

4.2.7 HR ニューラルネットワークにおけるバースティング

HR ニューロンモデルは、Hodgkin-Huxley モデルの安定的挙動をよく表すモデルであることが知られている。Belykh らは、同期に対して大変耐性のあるノコギリ波バースティングを起こす HR ニューロンのネットワークについて集中的に調べ、完全同期が起きることのすべての原因が、各ニューロンにより受け取られている信号の数 k であることを発見している。この結果について紹介する。

シナプス結合 HR ニューロンネットワーク

単一の HR モデルは、次式のように線形変換できる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax^2 - x^3 - y - z \\ \dot{y} &= (a + \alpha)x^2 - y - y \\ \dot{z} &= \mu(bx + c - z) \end{aligned} \tag{4.9}$$

ここで, x は膜電位, y, z は各々時間変化の速い電流 (fast current) と遅い電流 (slow current) である. パラメータは, 次のように固定されている.

$$a = 2.8, \alpha = 1.6, c = 5, b = 9, \mu = 0.001$$

次に, n 個のシナプス結合された HR モデルを考える.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= ax_i^2 - x_i^3 - y_i - g_s(x_i - V_s) \sum_{j=1}^n c_{ij} \Gamma(c_j) \\ \dot{y}_i &= (a + \alpha)x_i^2 - y_i \\ \dot{z}_i &= \mu(bx_i + c - z_i), \quad i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

ここでは, ニューロンはすべて同じで, シナプスは早く瞬時に信号伝達するとしている. パラメータ g_s はシナプス結合の強さを表している. 逆転電位 (reversal potential) は, 任意の x_i と任意の t に対して, $V_s > x_i(t)$ を満足する, つまりシナプスは興奮性 (excitatory) である. シナプスの結合関数はシグモイド関数 (sigmoidal function)

$$\Gamma(x_j) = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x_j - \Theta_s))}$$

でモデル化される. ここで, この関数 $\Gamma(x_j)$ の極限形はヘビサイド関数 (Heaviside function) である. この形の結合系はよく使われ, Sommers and Kopell により, fast threshold modulation と呼ばれている. 閾値 Θ_s は単一ニューロンバーストの各スパイクが閾値に届くことのできるように選ばれる. ここでは次のように選定している.

$$\Theta_s = -0.25, \quad V_s = 2$$

行列 $C = (c_{ij})$ は $n \times m$ 結合行列で, 次のように規程されている.

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & \text{if neuron } i \text{ is connected to neuron } j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

相互結合に方向性はないものとする, $c_{ij} = c_{ji}$ であるので, 行列 C は対称行列になる. さらに, その行和 (row-sum) は次式を満たすとする.

$$k = \sum_{j=1}^n c_{ij}, \quad i = 1, \dots, n$$

これは，同期解が存在する，つまり，超平面

$$D = \xi_1(t) = \xi_2(t) = \cdots = \xi_n(t)$$

$$\xi_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, \cdots, n$$

が不変であるための必要条件である．多様体 D 上の同期現象は次のシステムにより生成される．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax^2 - x^3 - y - z - kg_s(x - V_s)\Gamma(x) \\ \dot{y} &= (a + \alpha)x^2 - y \\ \dot{z} &= \mu(bx + c - z) \end{aligned} \quad (4.10)$$

ここで，神経振動子 (neural oscillator) 間の偏差を次式のように定義する．

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ij} &= x_j - x_i \\ \eta_{ij} &= y_j - y_i \\ \zeta_{ij} &= z_j - z_i \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1, \cdots, n$$

これらの偏差は小さいとして，同期多様体 D に横断的な摂動 (transverse perturbation) に対する誤差方程式は次式ようになる．

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{ij} &= (2a - 3x^2)\xi_{ij} - \eta_{ij} - \zeta_{ij} - kg_s\Gamma(x)\xi_{ij} + g_s(V_s - x)\dot{\Gamma}_x(x)(k\xi_{ij} + \sum_{j=1}^n (c_{jh}\xi_{jh} - c_{ih}\xi_{ih})) \\ \dot{\eta}_{ij} &= 2(a + \alpha)x\xi_{ij} - \eta_{ij} \\ \dot{\zeta}_{ij} &= \mu(b\xi_{ij} - \zeta_{ij}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

微係数は，点 $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ と (4.11) で定義される同期バースティング解に応答する $x(t), y(t), z(t)$ で計算される．最初の結合項 $S_1 = -kg_s\Gamma(x)\xi_{ij}$ は入力の数 k 分だけ算定されている．同時に 2 番目の結合項 $S_2 = g_s(V_s - x)\dot{\Gamma}_x(x)(\cdot)$ は結合形態に依存する．項 $c_{jh}\xi_{jh} - c_{ih}\xi_{ih}$ は線形カップリングに対するものと同じである．もともとの変数 x_i に関して，対応する結合行列 $G = C - kI$ は符号の変化を除いて，結合されたグラフの Laplacian である． G は 1 つのゼロ固有値 γ_1 と他はすべて実部が正でない固有値を持つことが知られている．もしも結合が相互 (mutual) であるならば， G は対象で，すべての固有値は実数となる．簡単のため，最大実部を持つ固有値 γ_2 は重複していないとする．そこで， G を対角化する線形変換を (4.11) に施すと，もっとも不安定な横断モードに対する安定性方程式が，次のように得られる．

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (2ax - 3x^2)\xi - \eta - \zeta - \Omega(x)\xi \\ \dot{\eta} &= 2(a + \alpha)x\xi - \eta \\ \dot{\zeta} &= \mu(b\xi - \zeta) \end{aligned} \quad (4.12)$$

ただし,

$$\Omega(x) = kg_s\Gamma(x) - g_s(V_s - x)\dot{\Gamma}_x(x)(k + \gamma_2)$$

(4.12) はマスター安定性関数 (master stability function) と類似のものである．もしも γ_2 が重複しているならば, G の Jordan 標準形に対応するブロックを張るベクトルに対して (4.12) に類似した方程式を書くことができるが, 安定性の議論は本質的に同じようなものである．基本的なネットワーク構成へこれを応用してみる．

Globally coupled networks

この場合には, $\gamma_2 = -n, k = n - 1$ である ($k = n - 1$ は全部が統合していることを意味している．) 結局

$$\Omega(x) = kg_s\Gamma(x) + g_s(V_s - x)\dot{\Gamma}_x(x)$$

となる．関数 $\Gamma(x)$ はその微分 $\dot{\Gamma}_x(x)$ とともに, 非負であり, $(V_s - x)$ は常に正である (シナプスは興奮性であるため)．したがって, $\Omega(x)$ は常に非負であり, 結合項 $-\Omega(x)\xi_{ij}$ は (4.12) のゼロ平衡点 (同期解に相当) を安定化しようとする (aim at stabilizing)．関数 $\Omega(x)$ は膜電位 $x(t)$ が閾値 Θ_s を超えるかどうか強く依存する．実際に, kg_s は領域 $x(t) > \Theta_s$ において $\Omega(x)$ の下界 (lower bound) であり, 安定性に強く貢献する．同時に, $x(t)$ が Θ_s 以下であるとき, $\Omega(x)$ の第 1 項急速にゼロに近づき, 2 番目の結合項が $x = \Theta_s$ に近い小さな領域で安定性に必要の要素となる．この領域パラメータ λ により定義される．我々は, (4.12) の安定性に対してリアプノフ関数法を適用し, 結合 g_s が十分に強いとき, 同期状態が安定になりうることを証明する．解析から同期解の遅いモードの主要な部分は安定領域にあることが示される．ただし, $\Omega(x)$ の影響は無視できる．ここで, リアプノフ関数の微分は常に負であり, 個々のシステムの解は互いに収束する．一方, 同期することがたいへん難しいバースティング解の部分は, 具合よく領域 $x(t) \geq \Theta_s$ に存在する．ただし, $\Omega(x) = kg_s$ の寄与は強く, k に依存する．同様に, $x(t) \leq \Theta_s$ に対する同期解の残りのスパイク部分, $\Gamma(x)$ が Heaviside 関数でない (λ はそんなに大きくない) という制約下で, g_s を増やすことにより安定化することができる．ここでは, 詳細な証明は省略し, 結果だけを述べる．我々が得た安定性条件は同期閾値に対する次の推定値を与える．

$$g_s^* = g_s^{(n=2)}/k \quad (4.13)$$

ただし, $k = n - 1$ で, $g_s^{(n=2)}$ は相互連結した 1 対の HR ニューロン ($k = 1$) の間の同期結合閾値に相当する定数である. 定数 $g_s^{(n=2)}$ は十分条件からきており, それゆえ, 実際の結合の強さに対して強過ぎる推定値 (overestimate) になっている. ここで, 実際の結合の強さは, 2 つの HR ニューロンの完全同期で, 前述のパラメータで, $\lambda = 10$ のとき, 2.94:1.285 である. しかしながら, 数値的に得られた $g_s^{(n=2)}$ を用いると, 任意の k に対して, 閾値 g_s^* を予測することができる.

4.2.8 HR ニューロン単体モデル

Hindmarsh-Rose(HR) モデルは構造が簡単で, 実生物学的ニューロンにより発生する豊富な発火パターンを数値的に生成することができる.

4.2.9 HR ニューロンの動特性方程式とオブザーバの構成 単体モデル

HR ニューロン単体の動特性は以下のように表される [19],[24],[25]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax^2 - x^3 - y - z + I \\ \dot{y} &= (a + \alpha)x^2 - y \\ \dot{z} &= \mu(bx + c - z)\end{aligned}$$

ただし, x は膜電位 (membrane potential), y, z は各々速い電流 (fast current) と遅い電流 (slow current), I は印加電流 (applied current), $a, \alpha, \mu b, c$ は定数パラメータである. 外部入力電流 I を内部パラメータとみなした HR ニューロン単体モデル [?] は次式のように書くことができる

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}} &= A\mathbf{w} + \mathbf{h}(x) + \Xi_0(x)\boldsymbol{\theta}_0 \\ v &= C\mathbf{w}\end{aligned}$$

ただし,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T, A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} -x^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\
\Xi_0 &= \begin{bmatrix} x^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\theta}_0 &= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & I & a + \alpha & \mu b & \mu c \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

とし, x は膜電位, y, z は速い電流と遅い電流, I は外部入力電流, $a, \alpha, \mu, \mu b, \mu c$ は定数パラメータで速い時定数 μ のみ既知とする.

この系に対して Zhang らの提案している多入力時変形の適応オブザーバを適用すると次式のオブザーバが構成できる.

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}} = A\hat{\mathbf{w}} + \mathbf{h}(x) + \Xi_0(x)\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 \quad (4.14)$$

$$+ [K + \Psi(t)\Gamma\Psi^T(t)C^T\Sigma(t)][v - C\hat{\mathbf{w}}] \quad (4.15)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_0 = \Gamma\Psi^T(t)C^T\Sigma(t)[v - C\hat{\mathbf{w}}] \quad (4.16)$$

また, 外部入力電流を入力として分離した HR ニューロン単体モデルは次式のようにあらわすことができる [?].

$$\dot{\mathbf{w}} = A\mathbf{w} + \mathbf{h}(x) + \Xi_1(x)\boldsymbol{\theta}_1 + \mathbf{b}I \quad (4.17)$$

$$v = C\mathbf{w} \quad (4.18)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T, A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}, \\
C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} -x^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\
\Xi_1 &= \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\theta}_0 &= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & a + \alpha & \mu b & \mu c \end{bmatrix} \\
\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.
\end{aligned}$$

この系に対して Zhang らの適応オブザーバを基に, 出力誤差を入力推定値に用いる機構を付加した適応オブザーバを以下のように提案する.

$$\dot{\hat{w}} = A\hat{w} + \mathbf{h}(x) + \Xi_1(x)\hat{\theta}_1 + \mathbf{b}\hat{I} \quad (4.19)$$

$$+ [K + \Psi(t)\Gamma\Psi^T(t)C^T\Sigma(t)][v - C\hat{w}] \quad (4.20)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \Gamma\Psi^T(t)C^T\Sigma(t)[v - C\hat{w}] \quad (4.21)$$

$$\hat{I} = -\mu(\hat{v} - v) = -\mu(\hat{x} - x) \quad (4.22)$$

結合モデル

シナプス結合された 2 つの HR ニューロン [?] が結合の強さを変更した場合の膜電位の変化をシミュレーションする.(4.23) 式より結合ニューロンのモデルは次式のようになる.

$$\dot{w}_i = Aw_i + \mathbf{h}(x_i) + \Xi_{1i}(x)\theta_1 + \mathbf{b}I_i$$

$$v_i = Cw_i$$

ただし

$$w_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T, A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_i \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ 0], \mathbf{h}(x_i) = [-x_i^3 \ 0 \ 0]^T,$$

$$\Xi_{1i} = \begin{bmatrix} x_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_{1i} = [\theta_{1i} \ \theta_{3i} \ \theta_{4i} \ \theta_{5i}]$$

$$= [a \ a_i + \alpha_i \ \mu b_i \ \mu c_i]$$

$$\mathbf{b} = [1 \ 0 \ 0]^T,$$

$$I_i = -g_s(x_i - V_{si})G(x_j),$$

$$G_i(x) = \frac{1}{1 + \exp\{-\lambda(x - \theta_i)\}} \quad (i = 1, 2 \ j = 1, 2 \ i \neq j)$$

とする. g_s はニューロンの結合強さを表しており, 単体ニューロンの時と同様に μ のみ既知のものとして扱う

4.2.10 数値例

HR ニューロンモデルは、微分方程式のパラメータ値に依存して様々な発火パターンを生成することが知られている [27] . このことから、パラメータ値の違いにより、発火パターンを分類することができると考えられる . 我々は、パラメータの中で、 a と I に注目する . ここで、パラメータ a 単体ニューロンの内部パラメータであり、 I は外部から印加される電流である . パラメータ I を $I = 0.05$ と固定したとき、HR ニューロンモデルは、 $a \in [1.8, 2.85]$ のとき、tonic bursting(TB) で、 $a \geq 2.9$ のとき、tonic spiking(TS) の応答を呈する . 一方、パラメータ a を $a = 2.8$ と固定したとき、HR ニューロンモデルは、 $I \in [0, 0.18]$ のとき、tonic bursting で、 $a \in [0.2, 5]$ のとき、tonic spiking の応答を発生する . オブザーバの推定結果を図 4.1 ~ 4.12 に示す . 図 4.1 ~ 4.6 は単一モデルにおいて内部パラメータおよび外部入力電流が $a = 2.8, I = 0.3$ の場合の tonic bursting 応答の場合の推定結果を示しており、図 4.7 ~ 4.12 は結合モデルにおいて内部パラメータおよび結合係数が $a_i = 2.8, g_s = 1$ の場合の tonic bursting ニューロンどおしの強い結合で結ばれている場合の推定結果を示している . また点線が推定値、実線が測定値 (真値) を表している . 状態変数の推定についてはいずれの場合も推定できているか、ゲインの過不足やバイアスの影響により若干のずれがあったがおおむね推定できていると考えられる . しかし外部入力電流 I に関しては I が定数である場合は Zhang らのモデルが有効であり、時変である場合には、今回提案したオブザーバでも追従しきれない部分があったためにオブザーバゲインなどの改良が必要である .

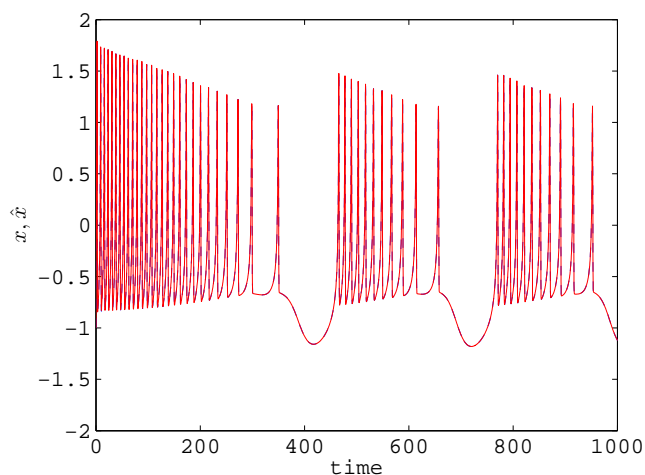


図 4.1: 単一モデルにおける x の推定 ($a = 2.8, I = 0.3$)

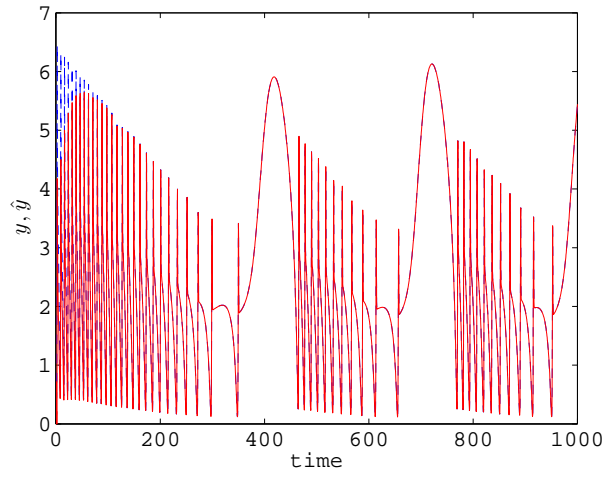


図 4.2: 単一モデルにおける y の推定 ($a = 2.8, I = 0.3$)

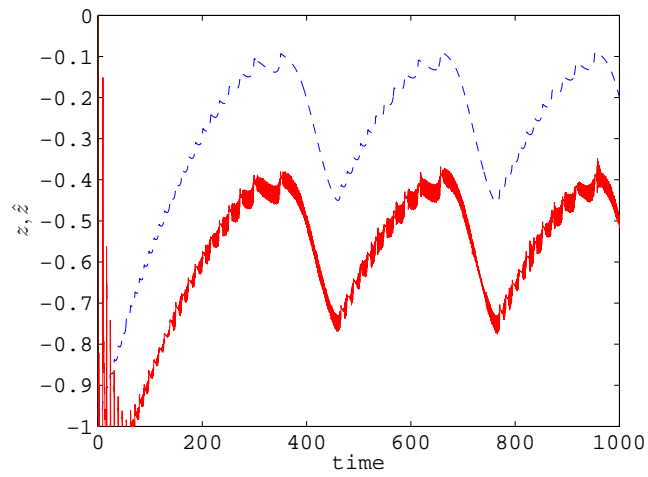


図 4.3: 単一モデルにおける z の推定 ($a = 2.8, I = 0.3$)

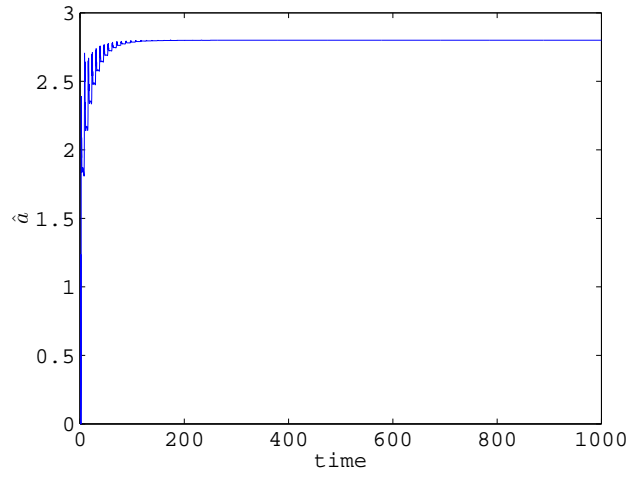


図 4.4: 単一モデルにおける a の推定 ($a = 2.8, I = 0.3$)

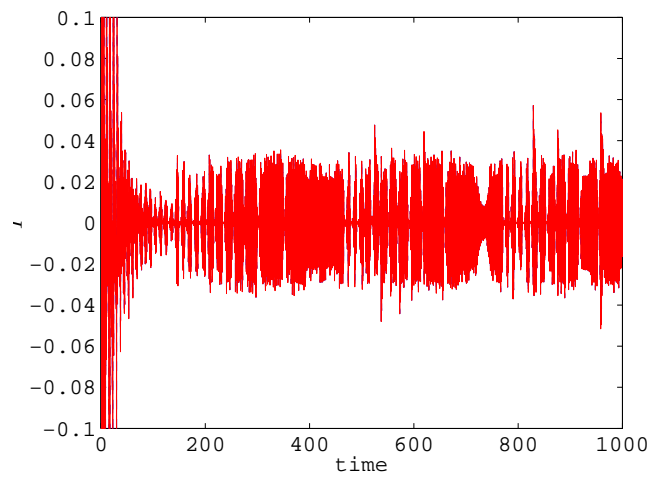


図 4.5: 単一モデルにおける I の推定 ($a = 2.8, I = 0.3$)

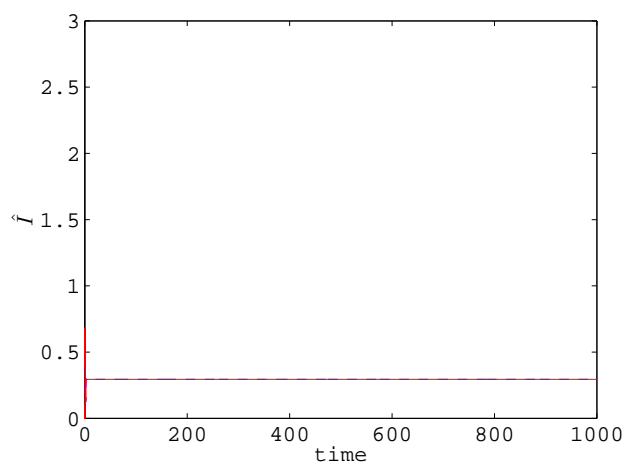


図 4.6: 単一モデルにおける I の推定 (Zhang らのモデルを使用 $a = 2.8, I = 0.3$)

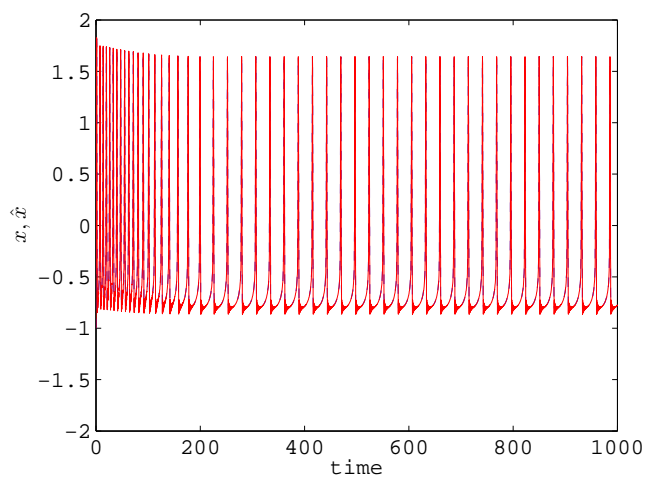


図 4.7: 結合モデルにおける x_1 の推定 ($a_i = 2.8, g_s = 1$)

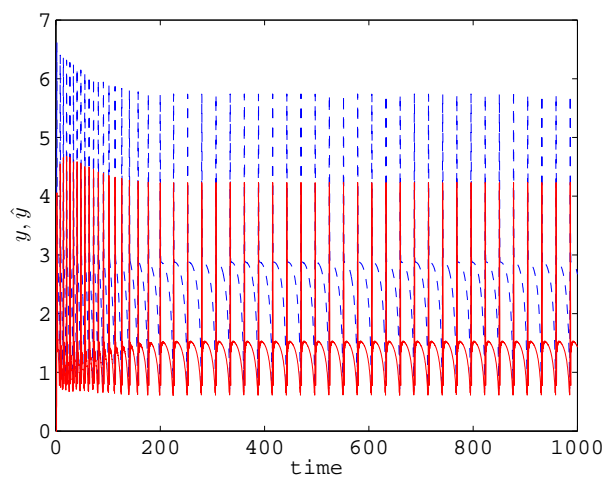


図 4.8: 結合モデルにおける y_1 の推定 ($a_i = 2.8, g_s = 1$)

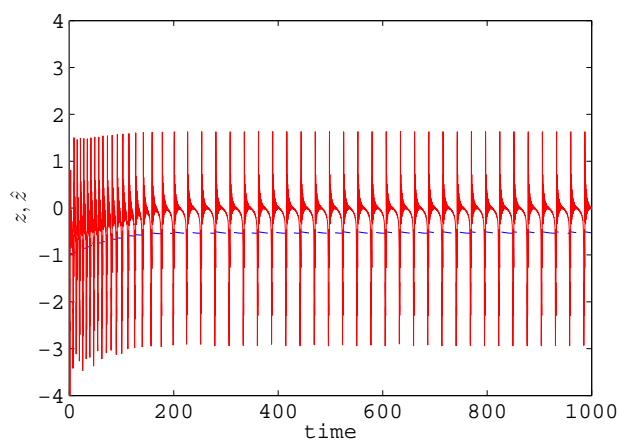


図 4.9: 結合モデルにおける z_1 の推定 ($a_i = 2.8, g_s = 1$)

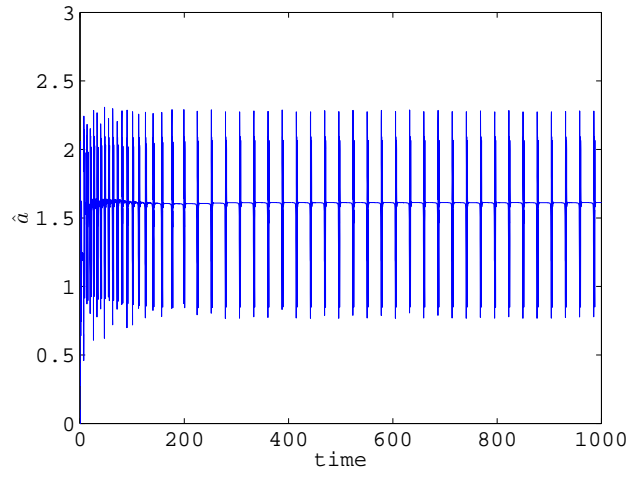


図 4.10: 結合モデルにおける a_1 の推定 ($a_i = 2.8, g_s = 1$)

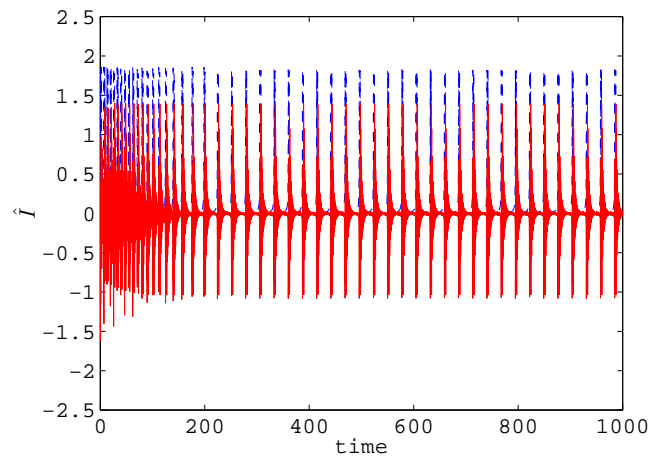


図 4.11: 結合モデルにおける I_1 の推定 ($a_i = 2.8, g_s = 1$)

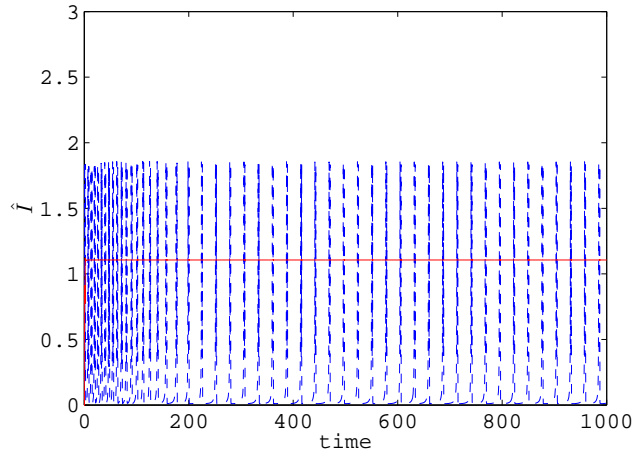


図 4.12: 結合モデルにおける I_1 の推定 (Zhang らのモデルを使用, $a_i = 2.8, g_s = 1$)

4.3 CAM 植物の体内リズムモデルへの適用

本節では Blasius らの提案するベンケイソウ型光合成モデル (CAM モデル) の内部パラメータ推定問題に瞬時リアプノフ指数を適用する．内部パラメータの推定問題には各状態変数の摂動の速度の差に注目し, critical manifold を導入することにより, 少ない内部状態変数で推定が可能ないようにオブザーバの構成を行う．また CAM モデルの各状態変数はリミットサイクルの応答を示し, 他節の各応答と比較することにより瞬時リアプノフ指数の性能を検証する．

4.3.1 植物における光合成について

植物は光エネルギーを用いて空気中の炭酸ガスを固定し, 根からの水分とから有機物を合成する (光合成)．通常の植物では光合成により最初に生成されるのは炭素を 3 個含む 3-フォスフォグリセリン酸 (3-PGA) である．光合成における CO_2 固定反応の最初の産物が炭素原子 3 個を含む化合物である植物を C3 植物といい, イネ, ムギなどの多くの植物がある．ところが, 植物の中には炭素を 4 個含むリンゴ酸などの C4-ジカルボン酸を生成する種類があることが 1960 年代にサトウキビについて分かり C4 植物と名付けられた．正確には, C3 植物が持つカルビン回路 (C3 回路) に CO_2 を濃縮する生化学的 CO_2 ポンプを付加した光合成装置を持ち, 炭素原子 4 個からなる酸, オキザロ酢酸の生産を行う植物を C4 植物という．C4 植物は一般的に高い光合成速度と成長

によって、特に亜熱帯、熱帯の環境において優勢とされている。トウモロコシ、サトウキビ、メヒシバ、エノコログサ、コシキソウ、アワ、ヒエなどがある。C4植物では、リンゴ酸への炭酸ガス固定は葉肉細胞で、炭酸ガスからのデンプンの合成は維管束鞘細胞でと空間的に分離されている。なお、C3植物ではC4植物の後の過程だけが行われている。このC3植物とC4植物に共通する過程をカルビン・ベンソン回路 (cycle) という。この回路は光合成反応における炭酸固定反応の代表的なものであり、緑色植物をはじめ、ほとんどの光合成生物 (一部の例外を除いて光合成細菌も同様) がこの回路を所持している。光化学反応により生じたNADPH (ニコチンアミドアデニンジヌクレオチドリン酸: 光合成経路あるいは解糖系のエントナー-ドウドロフ経路などで用いられている電子伝達体。脱水素酵素の補酵素として一般的に機能している) 及びATP (アデノシン三リン酸: 生物体で用いられるエネルギー保存及び利用に用いられるヌクレオチドであり、その生物体内の存在量や物質代謝における重要性から『生体のエネルギー通貨』とされている) が駆動力となって回路が回転し、最終的にフルクトース6-リン酸から糖新生経路に入り、多糖 (デンプン) となる。この回路の中核である炭酸固定反応を担うリブローズビスリン酸カルボキシラーゼ (RubisCO) はこの世で最も存在量の多い酵素であると言われている。いくつかの酵素 (RubisCOも含む) が光によって活性化されるために、夜間は炭酸固定活性が低下する。なお、C4植物はC3植物より強光下、高温、低炭酸ガス濃度での光合成速度が高く、熱帯の高温、強光度への適応と考えられている。C4植物の炭酸固定の最適速度はC3植物の最適温度 (15~20) よりも高く30~47で、最大光合成速度は約2倍もある。多くの植物の生育の適温は20~25とされている。

一方ベンケイソウ *Classula* 属の植物では、夜間CO₂を吸収してリンゴ酸 (malate, 化学式C₄H₆O₅で示性式はHOOC-CH(OH)-CH₂-COOH, 分子量は134。ヒドロキシ酸に分類されるカルボン酸) の形で蓄え (暗CO₂固定), 昼間CO₂に戻して (脱カルボキシル化反応), 炭水化物へ転換する光合成 (炭素代謝) を行うことが1800年代に知られておりCAM (Classulacean acid metabolism) 植物と呼ばれていたが, C4植物の発見により改めて注目されるようになった。ここで、炭酸ガスの暗固定をカルボキシル化反応という。CAMでは、C4のジカルボン酸回路に中間生成物としてリンゴ酸 (C4の有機酸) が含まれていて、それを液胞に蓄える。その最大の利点は、日差しが強く蒸散の激しい日中に気孔を開く必要がない点である。彼らは日の入り以降に蓄えられたリンゴ酸からCO₂を遊離させ、カルビン・ベンソン回路に送り、一滴の水も無駄にすることなく光合成を完了できる。多肉植物はCAM植物であることが多い。夜に気孔が開いて炭酸ガスを採り入れリンゴ酸の形で蓄える。昼は気孔を閉じている。

これは乾燥に耐えるための適応と考えられており、気孔を閉じることにより水分の蒸散を防いでいる。CAM 植物では夜間 CO_2 をリンゴ酸の形で蓄えるため、リンゴ酸の水溶液を溜められるよう細胞中に大きな液胞があり、このため多汁質である。また、昼間にはリンゴ酸を炭酸ガスに戻して光合成を行うが、リンゴ酸の長距離輸送はできないため、液胞は葉緑体のある細胞内になければならない。そうして、炭酸ガスを用いた光合成と、吸収した炭酸ガスの固定とを、同じ細胞の中で昼と夜の時間に分離して行われている。この点は C_4 植物と異なっている。CAM 植物は一般に夕方気孔が開き始めると炭酸ガスを吸収し、一方光の中で CO_2 固定を行う。また若い葉は C_3 植物に似ており、天候によっても気孔の開閉は変化する。栽培にとって重要と思われるのは、土壌含水量、昼夜の温度差、日の長さ、炭酸ガス濃度により暗固定は変わる事である。また、これから、サボテンはそれよりも高温の方が生長しやすいと考えられる。

CAM 植物は被子植物約 23 万種の内 2 万種にも及び C_4 植物より遙かに多いかも知れないといわれている。ベンケイソウ科、サボテン科、トウダイグサ科（ユーフォルビア）、ユリ科（アロエなど）、ヒガンバナ科（竜舌蘭、アガベ）、アナナス科（アナナス、パイナップル）、ラン科（バニラ）、ツルナ科（リトープス）、ガガイモ科（ホヤ）などである。CAM 植物の研究はこれらについて広く行われており、サボテンについての研究もある。CAM 植物につながる先駆的研究として、Opuntia の茎の緑色部分が夜に炭酸ガスを吸収することが 1804 年に発見され、ベンケイソウ（Classula）の葉において夜に有機酸が蓄積されることが見いだされていた。光合成により生成された炭水化合物は貯蔵部へ運ばれる（転流）。サボテンにおける転流は非多汁性の植物に対して非常に小さいことが報告されており、サボテンの生長速度が低いことと対応する現象と考えられている。CAM 植物の簡易判定は、次のようなものがある。CAM 植物の葉の組織内では、朝リンゴ酸の存在により pH の値は低く、リンゴ酸が CO_2 に変わるにつれて pH の値は高くなるはずである。CAM 植物と思われる多肉植物と多肉植物ではない植物の葉について 1 日の各時間の葉の組織内の pH を調べた比較実験を行うと良い。

光合成速度を比べると C_4 植物は C_3 植物より大きい、一方 CAM 植物は遙かに低い。 C_4 植物が高温・乾燥下で効率を追求したのに対して、CAM 植物は効率よりもサバイバルを選んだかのようなのである。Black によれば、最大光合成速度は C_4 が 40~80、 C_3 が 15~40 に対して CAM は 1~4（葉の面積当たり、単位は $\text{mgCO}_2/\text{dm}^2/\text{h}$ ）に過ぎない。従って生長速度も同様であり、 C_4 が 4~5、 C_3 が 0.5~2 に対して CAM は 0.015~0.018（葉の面積当たり、単位は $\text{g 乾物重}/\text{dm}^2/\text{d}$ ）に過ぎない。植物の水利用効率（蒸散比）は、1g の CO_2 が同化されるために必要な水の消失量で表される。 C_4 が 250~350、 C_3 が 450~950 に対して CAM は暗固定が 18~100、明固定が 150~600 と報告さ

れている。CAM 活性は昼温が高く夜温が低い条件で大きいことが知られている。夜のリンゴ酸合成には温度が低い方がよい。ただし、5℃以下と30℃以上で阻害される。昼のリンゴ酸の消費は高温ほど活発になる。ベンケイソウではCAM 活性の大きくなる昼/夜温の組み合わせは27/17℃であるとされている。

CAM 植物の現象に関する最近の主な結果は次のとおりである。Anderson ら (C.M. Anderson & M.B. Wilkins, *Planta*, 177, 401-408, 1989) 及び Grams ら (T.E.E. Grams, A. M. Borland, A. Roberts, H. Griffiths, F. Beck & U. Luttge, *Plant Physiol.*, 113, 1309-1317, 1997) は、とりまく環境から供給される温度、光の照射、二酸化炭素の量のような制御パラメータ(操作量)の変化に対するCAM 植物の応答を研究するために、かなりの実験を行っている。Buchanan-Bolling ら (I.C. Buchanan-Bolling & A.C. Smith, *Planta*, 161, 314-319, 1984) は、CAM 植物の体内リズムがこれらの制御パラメータ空間の限られた範囲内でのみ安定であることを指摘し、例えば、もし温度あるいは光の強さをあるレベル以上に増加させたならば、連続光下での体内リズムが消失することを示している。Luttge ら (U. Luttge & F. Beck, *Planta*, 188, 28-38, 1992) は、臨界的な閾値レベルにおいて、たいへん小さな温度や光の強度の摂動でリズムが壊れてしまうことを報告している。Grams ら (T.E.E. Grams, F. Beck & U. Luttge, *Planta*, 198, 110-117, 1996) は、温度に関しては、リズムの消失は、高い方の臨界レベルだけでなく、低い方の臨界レベルを通過するときにも起き、リズムと定常状態との遷移は可逆であることを明らかにしている。このことは、温度、光の強度が体内CAM リズムを決定する重要な制御パラメータであることを物語っている。

また、CAM 植物を数学モデルにする試みも、次のようになされている。Nungesser ら (D. Nungesser, M. Kluge, H. Tolle & W. Oppelt, *Planta*, 162, 204-214, 1984) は、昼夜サイクルの間のCAM 代謝濃度の変化を表す非線形方程式系からなる最初のCAM モデルを提案している。ついで、Luttge ら (U. Luttge & F. Beck, *Planta*, 188, 28-38, 1992)、Blasius ら (B. Blasius, F. Beck & U. Luttge, *J. Theor. Biol.*, 184, 345-351, 1997)、Grams ら (T.E.E. Grams, A.M. Borland, A. Roberts, H. Griffiths, F. Beck & U. Luttge, *Plant Physiol.*, 113, 1309-1317, 1997) 及び Blasius ら (B. Blasius, F. Beck & U. Luttge, *Plant, Cell and Environment*, 21, 775-784, 1998) は、Nungesser モデルを改善した簡略モデルを提案し、連続条件下での体内リズムだけでなく、制御パラメータを変化させたときのリズムの消失についてのシミュレーションを行っている。また、Blasius ら (B. Blasius, F. Beck & U. Luttge, *J. Theor. Biol.*, 184, 345-351, 1997、B. Blasius, F. Beck & U. Luttge, *Plant, Cell and Environment*, 21, 775-784, 1998) は細胞レベルでの炭素の流れに着目したCAM の1細胞簡略モデルを提案している。ここでは、基本

的要素として3つの反応体のたまり（内部二酸化炭素量，細胞質のリンゴ酸及び液胞内のリンゴ酸）を考え，細胞質と液胞間のリンゴ酸の輸送調節がCAMで観測される体内リズムの確立に重要なプロセスになっていると主張している．特に，リズムを発生させるために，強い履歴現象を示す受動的なリンゴ酸流出のスイッチングが必要であると考え，リレー要素を用いた比較的粗い近似によりスイッチングをモデル化している．しかしながら，離散的に分離されたヒステリシス状態は生体システムの現実的な挙動とは程遠いなどの問題点があった．そこで，Neffら（R.Neff, B.Blasius, F.Beck & U.Lüttge, *J.Memb.Biol.*, 165, 37-43, 1998）は，CAM植物の葉の熱力学的性質から液胞膜の連続的なヒステリシススイッチをモデル化し，さらに，Blasiusら（B.Blasius, R.Neff, F.Beck & U.Lüttge, *Proc.R.Soc.Lond.B.*, 266, 93-101, 1999）は，液胞膜の動特性を考慮し，N型関数を用いた液胞膜の動特性を微分方程式系に追加したモデルを提案している．

4.3.2 最小CAMモデル

BlasiusらのCAMの数理モデルは，次のような文献において提案されているので，これについてまとめる．

- B.Blasius, F.Beck and Lüttge (1997) A model for photosynthetic oscillations in crassulacean acid metabolism (CAM), *J.Theor.Biol.*, 184, 345-351 .
- B.Blasius, F.Beck and Lüttge (1998) Oscillatory model of crassulacean acid metabolism: structural analysis and stability boundaries with a discrete hysteresis switch, *Plant Cell Env.*, 21, 775-784 .
- B.Blasius, R.Neff, F.Beck and Lüttge (1999) Oscillatory model of crassulacean acid metabolism with a dynamic hysteresis switch, *Prod.R.Soc.Lond.*, B266, 93-101 .

図4.13は日周サイクルの間の炭素の流れを生成するCAMの主な反応体たまりを表している．たまりの濃度は次のようなものからなっている：

- 内部二酸化炭素濃度 w : internal CO_2 concentration
- 細胞質内のリンゴ酸濃度 x : malate concentration in the cytoplasm

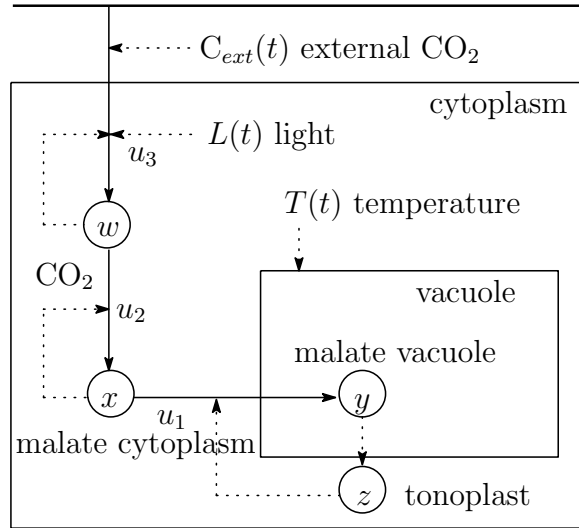


図 4.13: Blasius らの CAM モデルのフロー図

- 液胞内のリンゴ酸濃度 y : malate concentration in the vacuole
- 液胞膜内のリン脂質分子の並びを表す変数 z : order of the tonoplast membrane

これらの変数は代謝のゲインとロスを定義する流れ u_1, u_2, u_3 によって結合されている [38] . このモデルでは, 細胞質と液胞間のリンゴ酸の輸送調整が CAM 内の生体リズムを作る重要なプロセスになっており, ここでは, 受動的なリンゴ酸流出のヒステリシススイッチングが要求されている . 液胞膜は細胞質と液胞を分離し, 能動的なリンゴ酸の流入による液胞の充填プロセスの間, 浸透圧や温度の影響を受ける脂質膜である . Neff ら [38] は温度とリン脂質分子の表面濃度に対する膜の並びを表すパラメータ z に関連した熱力学的相ダイアグラムを構築している . これを CAM モデルに適用することにより, Blasius ら [39] は z を時間発展の付加的式を導く動的特変数として導入している .

CAM モデルは代謝を表す 3 つのフローと動特性を表す 4 つの非線形微分方程式でモデル化される . ダイナミクスは次式のように 4 つの非線形微分方程式でモデル化される [36] .

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \dot{w} &= -u_2 + u_3 = \epsilon f_1 \\ \epsilon \dot{x} &= -u_1 + u_2 = \epsilon f_2 \\ \dot{y} &= u_1 = f_3 \\ \tau \dot{z} &= g(z, T) - y = \tau f_4 \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

ただし，各変数は次のように定義されている．

| | |
|-----|-------------|
| w | 内部二酸化炭素濃度 |
| x | 細胞質内のリンゴ酸濃度 |
| y | 液胞内のリンゴ酸濃度 |
| z | 液胞膜の並びを表す変数 |

関数 $g(z, T)$ は次の図 4.14 の液胞膜モデルから得られ， τ は熱平衡へ至る弛緩の時定数である．小さなパラメータ $\alpha \ll 1$ は細胞質と液胞の体積比であり，CAM 植物では，1/100 程度である．4 番目の微分方程式はリンゴ酸輸送を連続的に表すために導入され，これが受動的なリンゴ酸流出のヒステリシススイッチを含み，CAM の生体内リズムを生み出す決定的要素となっている．Blasius ら [[39]] は，このモデルで次のように仮定している．

細胞内液胞に貯えられているリンゴ酸の浸透の結果，液胞の表面積の増加を招き，これは，モル当たりの平均面積 \bar{A} の変化により，膜形態の高度の並びから低度の並びにいたる 1 次の構造相転移を引き起こし，低度の並びから高度の並びにスイッチングする逆プロセスは強いヒステリシスにより特徴付けられる [38]

一方，膜のヒステリシスの挙動は，高度の膜並びが液胞膜壁の流動性を低下する限りは，輸送が拡散で起きるのか，担体で起きるのかに関係なく，液胞外への受動的なリンゴ酸輸送に強い影響を与える．

図 4.14 の液胞膜モデルは，同じ長さの 1 層の炭化水素（脂質）鎖（図の黒い長方形部分）が 1 つの面上に並び，vander-Waals 力による相互作用により，立体障害（steric hindrance）を構成しているものである [38]． θ は膜表面の法線に対する 1 つの脂質鎖の極座標角とすると，Joahning(1977,1979) の研究より，次式で与えられる [38]．

$$E(\cos) = -N\Gamma \cos - N\Lambda < S > \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \quad (4.24)$$

ただし， θ は膜表面の法線に対する脂質鎖の極座標角（polar angle）であり，つぎのように記号をおいている．

| | |
|-----------|---|
| N | Effective chain length(4) |
| Γ | Strength of steric hindrance |
| Λ | Strength of van-der-Waals force($2800 Jmol^{-1}$) |
| $< S >$ | Mean orientational order of all chains |

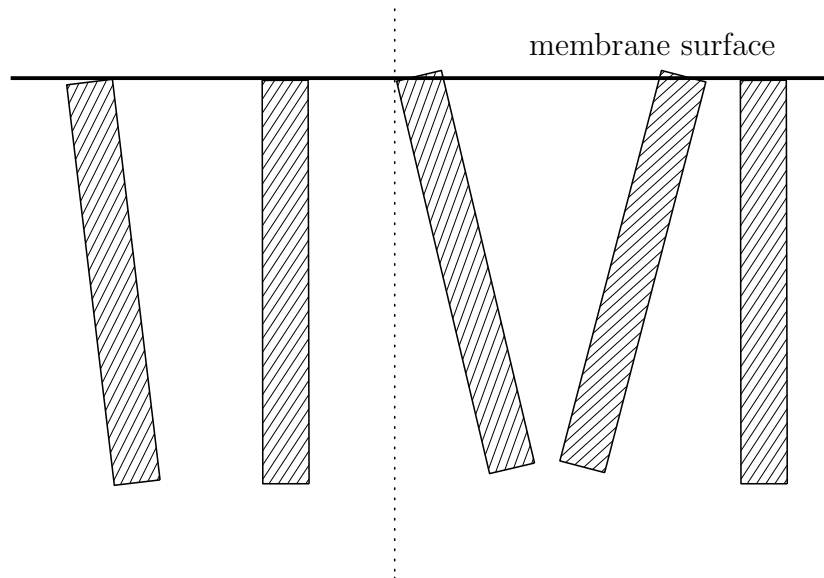


図 4.14: 液胞膜脂質の分子鎖の 1 層モデル

ここで, $\xi = \cos \theta$ とおいたとき, $\langle A(\xi) \rangle$ は, つぎの Boltzman 分布による温度平均操作を表している.

$$\langle A(\xi) \rangle = \int_{-1}^1 A(\xi) p(\xi) d\xi$$

ただし, 確率密度関数は, 次式で与えられている.

$$p(\xi) = \frac{\exp\left(-\frac{E(\xi)}{kT}\right)}{\int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{E(\xi)}{kT}\right) d\xi}$$

ただし, つぎのように記号をおいている.

| | |
|---|---|
| T | Temperature (K) |
| k | Boltzman constant ($1.381 \times 10^{-23} JK^{-1}$) |

$\langle S \rangle$ は, 全部の脂質鎖並びの平均値であり, 次式により与えられる.

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2}(3 \langle \cos^2 \theta \rangle - 1) \quad (4.25)$$

$\langle S \rangle$ は, probe molecules を使って, Electron Power Resonance(EPR), Nuclear Magnetic Resonance(NMR), Fluorescence Anisotropy(FA) を用いて, 直線測定することができる. Blasius のモデルでは, この $\langle S \rangle$ をあらためて, z と置きなおしている. 巨視的平均値といえば, 温度 T とモルあたりの平均面積 ϕ がある. 温度 T は, N, Λ を用いた次式の無次元量 T (reduced temperature という) を用いる.

$$T = \frac{kT}{N\Lambda}$$

$k = 1.381 \times 10^{-23} [JK^{-1}]$, $T = 299 [K]$, $\Lambda = 2800 [Jmol^{-1}]$, $N = 4$ のとき, Λ は $1 [mol]$ あたりなので, アボガドロ数 6×10^{23} をかけて換算するので, 次式のようなになる.

$$T = \frac{1.381 \times 10^{-23} \times 299}{4 \times 2800} \times 6 \times 10^{23} = 0.2212$$

もう1つの巨視量であるモルあたりの平均面積 ϕ は, $\langle \xi \rangle$ に密接に依存しており, 次式のような関係がある [38].

$$N\rho\phi = \frac{1}{b \langle \xi \rangle}$$

ただし, 記号をつぎのようにおいている.

| | |
|--------|----------------------------------|
| ρ | Number of chains per volume |
| b | Effective length of one C-C bond |

計算においては, 新しく ϕ' を上式の左辺として定義する [38].

$$\phi' = N\rho\phi = \frac{1}{b \langle \xi \rangle}$$

剛体鎖 (rigid chain) の場合には, 熱力学的励起は, 曲り角 θ と平均場強度パラメータ Λ を用いて表されるが, elastic chain の場合には, elastic bending constant M を用いる. この場合, reduced temperature は次式のようなになる.

$$T_{el} = \frac{kT}{\sqrt{M\Lambda}}$$

これより, 次式の関係が導かれる [38]

$$T = \frac{\sqrt{M}}{N\sqrt{\Lambda}} T_{el}$$

このことは, rigid chain と elastic chain の違いは, reduced temperature の目盛を換えることに相当する. 実際の液胞膜において, 脂質鎖は 14 から 26 個の炭素原子が含まれている. rigid chain と elastic chain の reduced temperature には, 次の関係がある [38].

$$T = 0.5T_{eff}$$

この関係から, 液胞膜で rigid chain を仮定したときの effective chain length を N_{eff} とおくと, 次式のようになる.

$$N_{eff} = 2\sqrt{\frac{M}{\Lambda}}$$

これらをまとめると, 次のような関係となる.

$$E(\xi) = -N\Gamma\xi - N\Lambda \langle S \rangle > \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) \quad (4.26)$$

$$\frac{\int_{-1}^1 \xi^2 \exp\left(-\frac{E(\xi)}{kT}\right) d\xi}{\int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{E(\xi)}{kT}\right) d\xi} = \frac{1}{b\phi'} \quad (4.27)$$

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \left(3 \frac{\int_{-1}^1 \xi^2 \exp\left(-\frac{E(\xi)}{kT}\right) d\xi}{\int_{-1}^1 \exp\left(-\frac{E(\xi)}{kT}\right) d\xi} - 1 \right) \quad (4.28)$$

$\langle S \rangle, \phi'$ の reduced temperature T に対する特性は, 上式を数値計算することにより得られる. Neff[[38]] の 1 つの温度についての手順をまとめると, つぎのようになる.

- (1) $k = 1.381 \times 10^{-23}$
(2) $N = 4, \Lambda = 2800$ とする
(3) T を与え, 次式で絶対温度 T に変換する.

$$T = \frac{TNA}{k \times 6 \times 10^{23}}$$

- (4) ϕ' をいくつか与えて, つぎの手順を繰り返す.
(5) b を適当に与え, つぎの連立非線形方程式を, 変数 $\Gamma, \langle S \rangle$ について解く.

$$F_1(\Gamma, \langle S \rangle) = 0 \quad (4.29)$$

$$F_2(\Gamma, \langle S \rangle) = 0 \quad (4.30)$$

ただし, $E(\xi), F_1(\Gamma, \langle S \rangle), F_2(\Gamma, \langle S \rangle)$ は次式で計算する.

$$E(\xi) = -N\Gamma\xi - N\Lambda \langle S \rangle + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)$$

$$F_1(\Gamma, \langle S \rangle) = \int_{-1}^1 (b\phi'\xi - 1) \exp\left(-\frac{E(\xi)}{kT}\right) d\xi$$

$$F_2(\Gamma, \langle S \rangle) = (2\langle S \rangle + 1) \int_{-1}^{-1} \exp\left(-\frac{E(\xi)}{kT}\right) d\xi - 3 \int_{-1}^1 \xi^2 \exp\left(-\frac{E(\xi)}{kT}\right) d\xi$$

- (6) $(\phi' \langle S \rangle)$ をプロットして, 1つの曲線を描く.
(7) Neff[[38]] と比較して, b を調整する. 各温度において, Neff らにより得られた曲線 $\langle S \rangle = h(\phi', T)$ の逆を, 次式のようにおく.

$$\phi' = G_0(\langle S \rangle, T)$$

Blasius ら [39] は, これを液胞膜モデルと液胞膜内部のリンゴ酸の動特性を, つぎのようにモデル化している.

- S のかわりに z を用いるが, 膜並び変数として, 両者は同じものである.
- 脂質 1 モルあたりの平均面積 ϕ に関する液胞膜の並びパラメータの依存性は, $G(z, T)$ のスカラー倍であり, これを次式のように書くことにする.

$$\phi = G(z, T) \quad (4.31)$$

と書く. この関数形は Blasius ら [39] の図に与えられている.

- 液胞内リンゴ酸濃度 y を増加させたときの脂質分子当りの平均面積 ϕ の増加: この依存性は次式のように線形であると仮定できる.

$$\phi(y) = \phi_0 + \lambda y \quad (4.32)$$

ただし, ϕ_0 は空の液胞の液胞膜に対する 1 モル当りの最小面積である.

- 液胞膜の並びパラメータ z のダイナミクスは熱平均からは導出できず, むしろ, 膜弛緩動作により説明される. そこで, 並びパラメータ z の変化率は熱平衡値 $g(z, T)$ と液胞内のリンゴ酸濃度との差に比例する, つまり, 次式が成り立つと仮定する.

$$\tau \dot{z} = g(z, T) - y \quad (4.33)$$

ただし, $g(z, T)$ は次式で与えられる.

$$g(z, T) = \frac{\alpha G(z, T) - \phi_0}{\lambda} \quad (4.34)$$

また, 弛緩時定数 τ は未知であるので, 適当に調整せざるを得ない.

フロー u_i は代謝反応のモデリングであり, CAM における炭素循環の全体の構造を含んでいる. 生化学的プロセスは次のフロー構造で表される.

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= c_1 x - c_2 P(z)x \\ u_2 &= c_3 \frac{w}{x} - c_4 x \\ u_3 &= c_5 \frac{(C_{ext}(t) - w)}{\exp(\alpha w)} - c_6 L(t)w + c_7 \frac{L_K}{L(t) + L_K} \frac{w_1}{w + w_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

ただし, u_1, u_2, u_3 は次を意味している [37].

- u_1 : 液胞内外へのリンゴ酸の流入出の差であり，動的なヒステリシススイッチをモデル化しているものである． $P(z)$ が液胞外に流出する液胞膜透水率を表している． $\rho = \frac{1}{P}$ は輸送抵抗と呼ばれるが，これは単純に液胞膜並び z に比例すると近似することから， $P(z)$ は次のように近似される．

$$P(z) = \frac{P_0}{z} \quad (4.36)$$

- u_2 : ホスホエノールピルビル酸カルボキシラーゼ (PEPc) により二酸化炭素が凝固されて生成されるリンゴ酸生成量と炭酸基除去による減少量との差．よく知られているリンゴ酸による PEPc のフィードバック抑制効果が第 1 項の $1/x$ 依存に表されている．
- u_3 : 外部からの二酸化炭素の取り込み量 $C_{ext}(t)$ から光合成による二酸化炭素の消費量を引いたものをモデル化しており，外部からの制御パラメータである光の強度 $L(t)$ に比例し，呼吸による二酸化炭素生成がプラスされている．気孔抵抗 ρ_s は内部二酸化炭素濃度 w に関係するが，線形より速く増加することから，ここでは，指数関数的増加式 $\rho_s \sim \exp(\alpha w)$ を用いることにしている [37]．気孔の開閉による二酸化炭素の取り込み量調整は気孔抵抗と二酸化炭素の取り込み量 $C_{ext}(t) - w$ との積によりなされている．呼吸により生成される二酸化炭素の付加的増加量が u_3 の第 3 項目に追加されている．呼吸は抑制係数 L_K, w_1 で光と内部二酸化炭素により抑制されると仮定している．
- 図 4.13 の点線に示すようなたまり間の調節要素に加えて，フローは比例定数 c_1, \dots, c_7 で表される材質定数によって基質（酵素の影響を受けて化学反応を起こす物質）濃度に線形依存する．

無次元解析を行うために，変数とパラメータを次のように置き換える．

$$\begin{aligned} x' &= \frac{c_4}{c_3}x, & y' &= \frac{c_2P_0}{c_3}y, & w' &= \frac{c_4}{c_3}w, & z' &= z, & t' &= c_2P_0t \\ \tau' &= \frac{c_2^2P_0^2}{c_3}\tau, & \epsilon' &= \frac{c_2P_0}{c_4}\epsilon, & T' &= T, & L' &= \frac{c_6}{c_4}L, & C'_{ext} &= \frac{c_4}{c_3}C_{ext} \\ \alpha' &= \frac{c_3}{c_4}\alpha, & L'_K &= \frac{c_6}{c_4}L_K, & w'_1 &= \frac{c_4}{c_3}w_1, & \lambda' &= \frac{c_3}{c_2P_0}\lambda, & \phi'_0 &= \phi_0 \end{aligned}$$

このような無次元化により，

$$c = \frac{c_1}{c_4}, \quad c_J = \frac{c_5}{c_4}, \quad c_R = \frac{c_7}{c_3} \quad (4.37)$$

とおくと、ダイナミクスとフローは次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon \dot{w} &= -u_2 + u_3 \\ \epsilon \dot{x} &= -u_1 + u_2 \\ \dot{y} &= u_1 \\ \tau \dot{z} &= g(z, T) - y \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= cx - \frac{y}{z} \\ u_2 &= \frac{w}{x} - x \\ u_3 &= c_J \frac{(C_{ext}(t) - w)}{\exp(\alpha w)} - L(t)w + c_R \frac{L_K}{L(t) + L_K} \frac{w_1}{w + w_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

上式が全体のCAMモデルで、次のような要素から構成されていることがわかる。

w, x, y, z : 状態変数 (定義は前述)

T, L, C_{ext} : 制御パラメータ (入力変数)

ϵ, τ : 短い時定数

$c, c_J, c_R, L_K, w_1, \alpha$: 定数

$g(z, T)$: 膜の並びの平衡状態を表す関数

u_1 : 液胞内外へのリンゴ酸の流入出の差。

u_2 : ホスホエノールピルビル酸カルボキシラーゼ (PEPc) により二酸化炭素が凝固されて生成されるリンゴ酸生成量と炭酸基除去による減少量との差。

u_3 : 外部からの二酸化炭素の取り込み量 $C_{ext}(t)$ から光合成による二酸化炭素の消費量を引いたもの。

平衡点は (4.23) 式の微分項 (フロー) をゼロとおくことにより得られ、次のようになる。

$$u_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.40)$$

一方、膜並びの平衡点は $\dot{z} = 0$ から得られる。

内部二酸化炭素濃度の平衡点 $\bar{w}(L, C_{ext})$ は、 $u_3 = 0$ から決定できるが、これは、

$$c_J \frac{(C_{ext}(t) - \bar{w})}{\exp(\alpha \bar{w})} - L(t)\bar{w} + c_R \frac{L_K}{L(t) + L_K} \frac{w_1}{\bar{w} + w_1} = 0 \quad (4.41)$$

を数値的に解くことにより求めざるを得ない．細胞質内リンゴ酸濃度の平衡点 \bar{x} は， $u_2 = 0$ とすることにより，次式のように得られる．

$$\begin{aligned}\frac{\bar{w}}{\bar{x}} - \bar{x} &= 0 \\ \bar{x} &= \sqrt{\bar{w}}\end{aligned}\tag{4.42}$$

液胞内リンゴ酸濃度の平衡点 \bar{y} は， $u_1 = 0$ とおくことにより，次式のように得られる．

$$\begin{aligned}c\bar{x} - \frac{\bar{y}}{\bar{z}} &= 0 \\ \bar{y} &= c\bar{x}\bar{z} = c\sqrt{\bar{w}}\bar{z}\end{aligned}\tag{4.43}$$

液胞膜並びの平衡点 \bar{z} は， $\dot{z} = 0$ とおくことにより，次式から求められる．

$$\bar{y} = g(\bar{z}, T)\tag{4.44}$$

(4.43)，(4.44) 式は 2 本のヌルクライン (null cline) を与える．ヌルクラインの交点が \bar{y} ， \bar{z} を計算することができる．

Blasius[[39]] に述べられているように，これは CAM ダイナミクスにおいて複数の安定平衡点とリミットサイクルを定義する．比較的高温と低温域では，システムが定常状態になる安定平衡点が出現する一方，中温域では，リミットサイクル的な振動解が存在する．これは，実験結果の状況を的確に反映している [[35]．Blasius[[39]] に述べられているように，これは CAM ダイナミクスには複数の安定平衡点とリミットサイクルが出現する．実験結果 [[35] と同様に，比較的高温と低温域では，システムが定常状態になる安定平衡点が出現する一方，中温域では，リミットサイクル的な振動解が存在する．

4.3.3 制御対象

CAM モデルは次式のように非線形状態方程式の形で書くことができる．

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, T, L, C_{ext})\tag{4.45}$$

ただし，

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

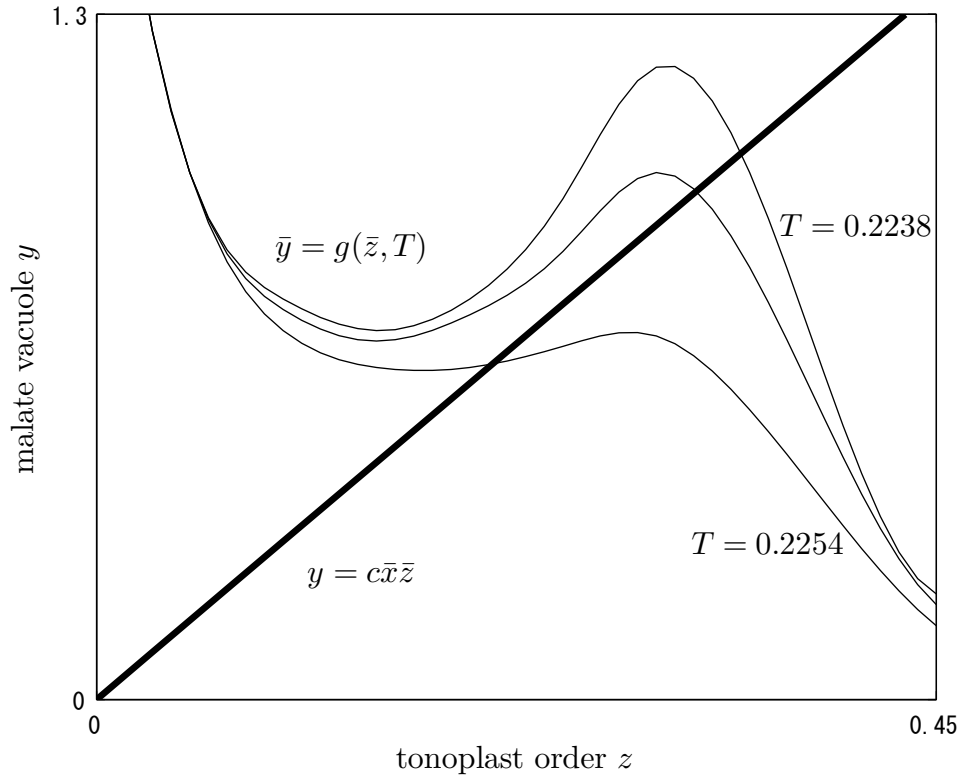


図 4.15: (4.43) 式が実太線で, (4.44) 式が 3 本の実細線のヌルクラインである.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{1}{\epsilon} \left\{ p(w, x, L) + \frac{c_J}{\exp(\alpha w)} C_{ext}(t) \right\} \\
 p &= - \left(\frac{w}{x} - x \right) - c_J \frac{w}{\exp(\alpha w)} - L(t)w + c_R \frac{L_K}{L(t) + L_K} \frac{w_1}{\bar{w} + w_1} \\
 f_2 &= \frac{1}{\epsilon} \left\{ - \left(cx - \frac{y}{z} \right) + \left(\frac{w}{x} - x \right) \right\} \\
 f_3 &= cx - \frac{y}{z} \\
 f_4 &= \frac{1}{\tau} \{ g(z, T) - y \}
 \end{aligned}$$

ここで, 各物理量と定数は次のように与えられている.

w, x, y, z : 状態変数 (定義は前述)

T, L, C_{ext} : 制御パラメータ (入力変数)

ϵ, τ : 短い時定数

$c, c_J, c_R, L_K, w_1, \alpha$: 定数

$g(z, T)$: 膜の並びの平衡状態を表す関数

非線形関数 $g(z, T)$ は関数形で与えられておらず, 図 4.16 のようにグラフの形で与えられていることから, シミュレーションでは, 3 次スプライン関数で近似している.

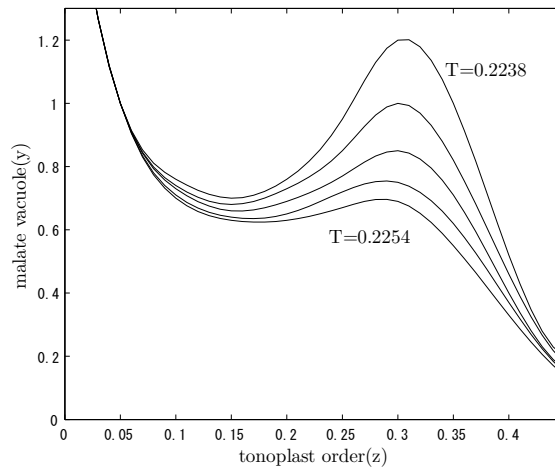


図 4.16: $T = 0, 2238, 0.2244, 0.2246, 0.2250, 0.2254$ のときの非線形関数 $y = g(z, T)$.

また, 出力方程式を次式のように仮定する.

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Blasius[[39]] に述べられているように, これは CAM ダイナミクスには複数の安定平衡点とリミットサイクルが出現する. 実験結果 [[35]] と同様に, 比較的高温と低温域では, システムが定常状態になる安定平衡点が登場する一方, 中温域では, リミットサイクル的な振動解が存在する.

4.3.4 CAM モデルにおける Critical manifold

ϵ は短い時定数 (後述するが $\epsilon = 0.001$) で定義されているため, w は x 速いシステムで構成されている. そこで得意摂動を伴う微分方程式の漸近的な解析の手法を用いる. w, x のダイナミクスは次のように与えられる.

$$\epsilon \frac{dw}{dt} = -u_2 + u_3, \quad \epsilon \frac{dx}{dt} = -u_1 + u_2. \quad (4.47)$$

$l = \frac{t}{\epsilon}$, $L(t) = 1$, $C_{ext}(t) = 1$, また状態変数 y, z を定数と仮定すると, 次の境界層モデルがえられる.

$$\frac{dw}{dl} = -u_2 + u_3, \quad \frac{dx}{dl} = -u_1 + u_2. \quad (4.48)$$

このとき, 境界層モデルのヤコビ行列は次式で与えられる.

$$J_{wx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(-u_2+u_3)}{\partial w} & \frac{\partial(-u_2+u_3)}{\partial x} \\ \frac{\partial(-u_1+u_2)}{\partial w} & \frac{\partial(-u_1+u_2)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(-u_2+u_3)}{\partial w} = -\frac{1}{x} - a_1(w)$$

$$\frac{\partial(-u_2+u_3)}{\partial x} = \frac{w}{x^2} + 1$$

$$\frac{\partial(-u_1+u_2)}{\partial w} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial(-u_1+u_2)}{\partial x} = -\frac{w}{x^2} - (c+1)$$

ただし

$$a_1(w) = c_J \frac{1 + (1-w)\alpha}{\exp(\alpha w)} + 1 + c_R \frac{L_K}{1 + L_K} \frac{w_1}{(w + w_1)^2}.$$

ヤコビ行列の対角和と行列式は次のようになる

$$\text{trace} J_{wx} = -\frac{1}{x} - a_1(w) - \frac{w}{x^2} - (c+1)$$

$$\det J_{wx} = a_1(w) \left(1 + \frac{w}{x^2}\right) + c \left(a_1(w) + \frac{1}{x}\right).$$

$a_1(w)$ は $w > 0$ において正であるため, ヤコビ行列の固有値は負である. そのため境界層システムは指数安定であるといえる. ϵ をゼロに近似した際の slow manifold のゼロ次近似, critical manifold は次式で与えられる.

$$0 = -u_2 + u_3, 0 = -u_1 + u_2. \quad (4.49)$$

slow manifold のゼロ次近似と同等である critical manifold は $h(w, x) = 0$ といった形で与えられる, w のダイナミクスのヌルクラインで構成されている. $h(\bar{w}, \bar{x}) = 0$ は孤立解 $\bar{x} = \phi_1(\bar{w})$ を持つと仮定する. この式はゼロ次近似 slow manifold と呼ばれている. また u_3 が複雑な式であるため $\phi_1(\bar{w})$ は容易に導出することができない. そのため MATLAB/Simulink を用いた数値近似を利用する. 図 4.17 は w ダイナミクスのヌルクラインを示しており, MATLAB のプロットエディタを利用することにより次の 2 次近似式を得ることができる.

$$\bar{x} \approx -0.43146\bar{w}^2 + 2.2032\bar{w} - 0.17466 =: \phi_1(\bar{w}). \quad (4.50)$$

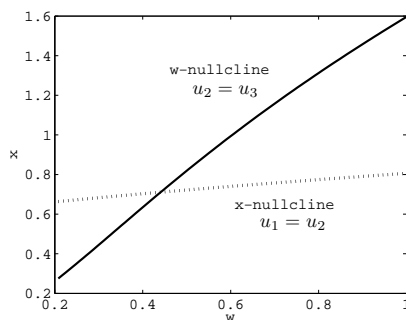


図 4.17: w ヌルクラインおよび x ヌルクライン.

コントロールパラメータとして $C_{ext}(t)$ または $L(t)$ を使用することにより w を変形することができる. 入力を次のように設定する.

$$C_{ext} = \frac{\exp \alpha w}{C_J} \{g(w(t) - s_0)\} \quad (4.51)$$

w ヌルクラインの次元を増加させることにより, フィードバックコントローラを使用して平衡点と critical manifold を変更することができる.

4.3.5 液胞膜以外の内部状態を利用したオブザーバの構成

本項ではまず w, x, y, T, L および C_{ext} が計測可能と仮定する. 推定を行うモデルは次の 2 次ダイナミクスシステムに次元を減らすことができる.

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= \frac{1}{\tau} \{g(z, T) - y\} \\ \dot{y} &= cx - \frac{y}{z}. \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

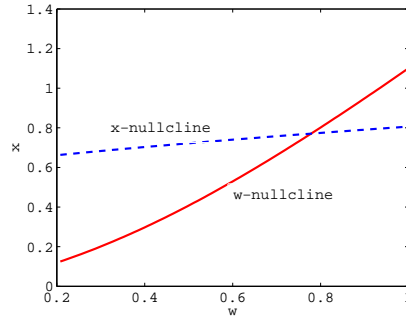


図 4.18: (4.51) を使用した際の w ノルクラインおよび x ノルクライン, where $g = -1, s_0 = 2$.

次のオブザーバ型の推定器を導入する .

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= \frac{1}{\tau} \{g(\hat{z}, T) - y\} + k(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{y}} &= cx - \frac{\hat{y}}{\hat{z}} \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

ただし \hat{z} と \hat{y} は状態変数 z と y の推定値であり, x, y と T は測定可能であるとする . また定数 k はオブザーバゲインである .

次に非線形関数 $g(\hat{z}, T)$ の推定を行うために, ファジー基底関数展開を使用する .

$$\hat{g}(\hat{z}, T) = \hat{\theta}^T \zeta(\hat{z}, T) \quad (4.54)$$

オブザーバ型のダイナミクス推定器に適応ファジー識別子を (4.53) に加えると次式のようなになる .

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= \frac{1}{\tau} \{ \hat{g}(\hat{z}, T) - y \} + k(y - \hat{y}) \\ &= \frac{1}{\tau} \{ \hat{\theta}^T \zeta(\hat{z}, T) - y \} + k(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{y}} &= cx - \frac{\hat{y}}{\hat{z}} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\gamma \zeta(\hat{z}, T) (\hat{y} - y) \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

上式は適応オブザーバとみなすことができ, まとめると次式のように書き換えることができる

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= \frac{1}{\tau} \{ \hat{\theta}^T \zeta(\hat{z}, T) - y \} + k(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{y}} &= cx - \frac{\hat{y}}{\hat{z}}, \quad \dot{\hat{\theta}} = -\gamma \zeta(\hat{z}, T) (\hat{y} - y) \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

この式に (4.50) の 2 次近似式を適用することにより, w, y または x, y および T が測定可能であれば推定が可能である.

4.3.6 数値例

本節では Blasius らの提案した CAM 最小モデルの応答に対し ILE を適用し, リミットサイクルにおける ILE の挙動を確認する. CAM モデルのシミュレーションパラメータは表 4.1 のとおりである. CAM プラントの応答の例として, $T = 0.2246$ の際の各状

表 4.1: プラントパラメータ

| | |
|------------|--|
| C_{ext} | 1 |
| $L(t)$ | 1 |
| T | 0.2238, 0.2242, 0.2246, 0.2250, 0.2254 |
| c | 5.5 |
| c_J | 1 |
| c_R | 1 |
| ϵ | 0.001 |
| τ | 0.35 |
| α | 1.5 |
| w_1 | 0.1 |
| L_K | 0.5 |
| R | 0.1 |
| ϕ_0 | 2 |
| λ | 7 |

態変数の応答を図 4.19 に示す. また温度を変化させた際の $y - z$ の位相空間動的挙動について図 4.20 に示す. 図 4.20 を見るとわかるように低温域や高音域では一定値に収束してしまいシステムはリミットサイクルの挙動を示さない. そこで, 図 4.19 の応答を示す $T = 0.2246$ の際の挙動について内部状態の推定を行った.

図 4.21 は状態変数 z とその推定値 \hat{z} を表しており、図 4.22 は推定誤差に対する ILE を、図 4.23 は状態変数と推定値の同期度を表している。推定自体は状態変数の極大付近でゆらつきが確認できたが、それ以外の部分での推定は可能になっていることがわかる。

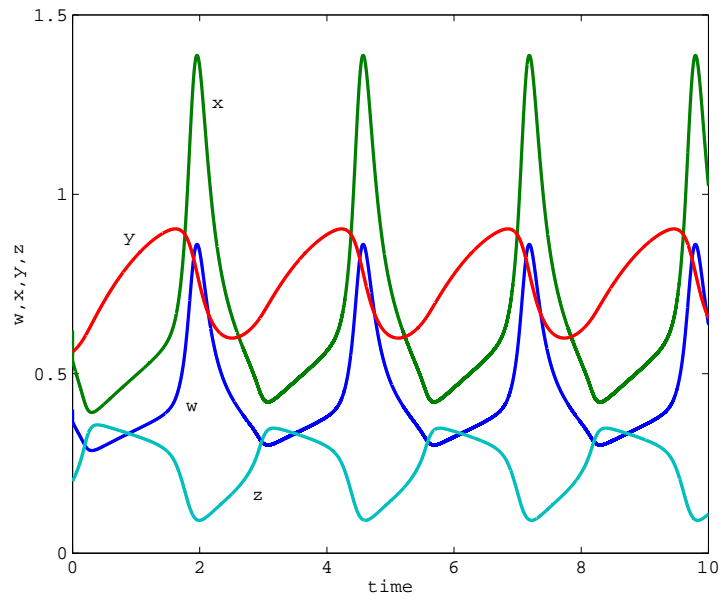


図 4.19: CAM の応答 ($T = 0.2246$)

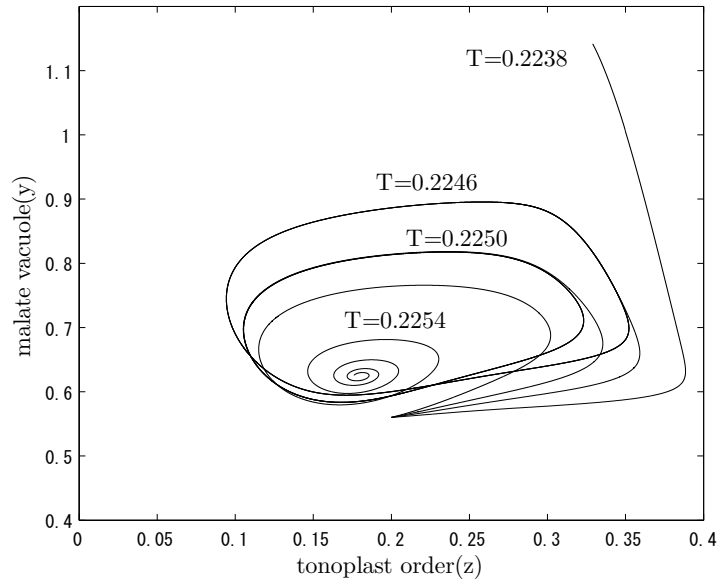


図 4.20: 異なる相対温度 T の連続光下での位相空間動的挙動: $T = 0.2238, 0.2246, 0.2250, 0.2254$.

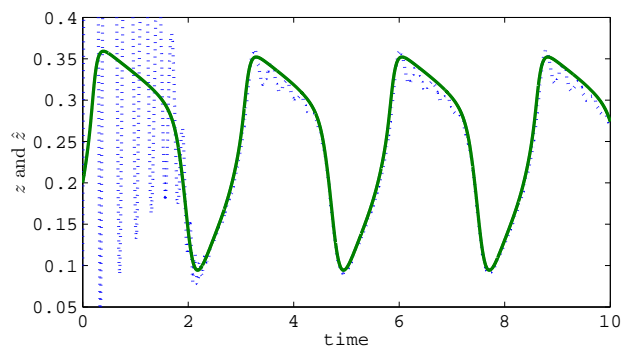


図 4.21: 状態変数 z (実線) と推定値 \hat{z} (点線)

第5章 生体システムへのILE適用例

5.1 はじめに

本章では前章で示した生体システムにおける同期問題およびパラメータ推定問題に提案した ILE を，状態変数や推定誤差等に適用することによって，非線形系によって生じるさまざまな応答を ILE によって特徴づけができないかを検討する．

5.1.1 HR ニューロンモデルへの適用

本節ではまず $a = 2.8, I = 0.05$ の tonic bursting の反応を示すニューロンについて適用を行う．図 5.1 はニューロンモデルの 3 次元位相空間モデルを表し，図 5.2 ~ 5.25 は各状態変数についてそれぞれ次のような順についてまとめている．

1. 状態変数の信号応答
2. 状態変数の信号応答に対するリアプノフスペクトラム
3. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
4. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
5. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE の移動平均 $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$
6. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$

次に比較のために $a = 2.9, I = 0.05$ の tonic spiking の反応を行うニューロンの膜電位について適用を行う．図 5.8 ~ 5.13 は図 5.2 ~ 5.7 と同様な順番でまとめてある．また詳細の確認を行うために図 5.26 に tonic bursting の一周期の波形の拡大図を，図 5.27 にそのときの $\lambda_l(\phi(t) = t^{-1})$ の移動平均を表示する．まず各状態変数のリアプノフスペクトラムに注目を行う．状態変数 x, y についてはリアプノフスペクトラムは正の値の範囲内で三角波を描きながら収束する傾向が確認できるが(図 5.3, 5.15)，変数 z に関して

は負の範囲内でランダムな値をとっており，各変数，条件に対応するリアプノフスペクトラムの反応はばらばらであるため特徴付けはできない．一方提案した ILE に注目すると各変数，基準関数の場合でも λ_n は正値になだらかに収束を見せておりこれだけでは判別のための特徴付けは難しいが， λ_l に注目を行うと，すべての状態変数・条件において，tonic bursting ニューロンで見られたなだらかな応答の部分の他に，周期的で極大値及び極小値で微分が困難な三角波に近い形状の応答が確認された．ILE においても tonic bursting ニューロンの静止期はなだらかな応答を示すため，それらの有無で判別ができると考えられる．また ILE の周期的で極大値及び極小値で微分が困難な三角波に近い形状の応答は，いくつかの平衡点を通るヘテロクリニック軌道に対する ILE との関連付けができるものと考えられる．

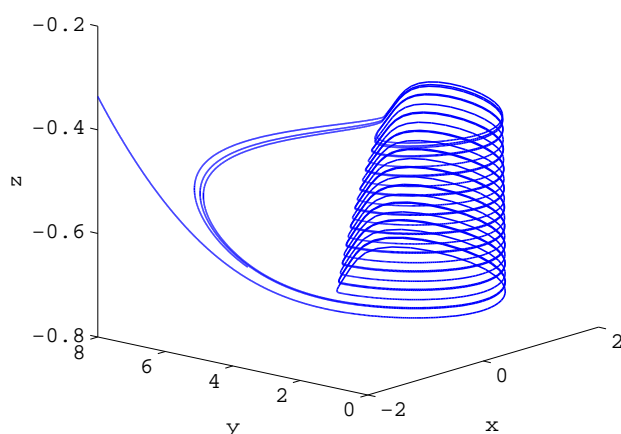


図 5.1: HR ニューロンモデルの応答 ($a = 2.8, I = 0.05$)

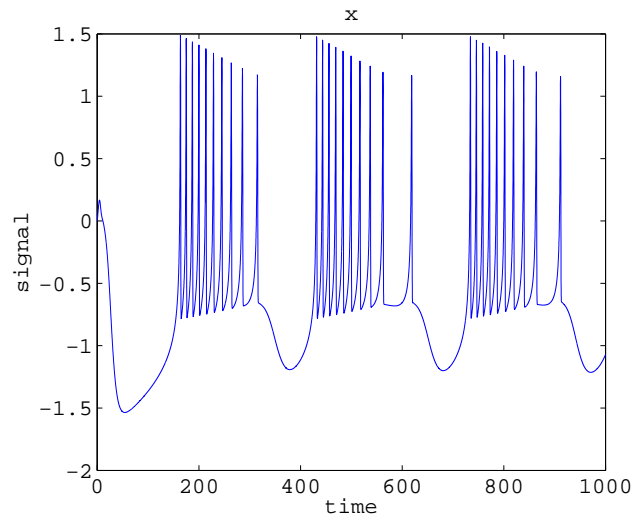


図 5.2: x の応答 ($a = 2.8, I = 0.05$)

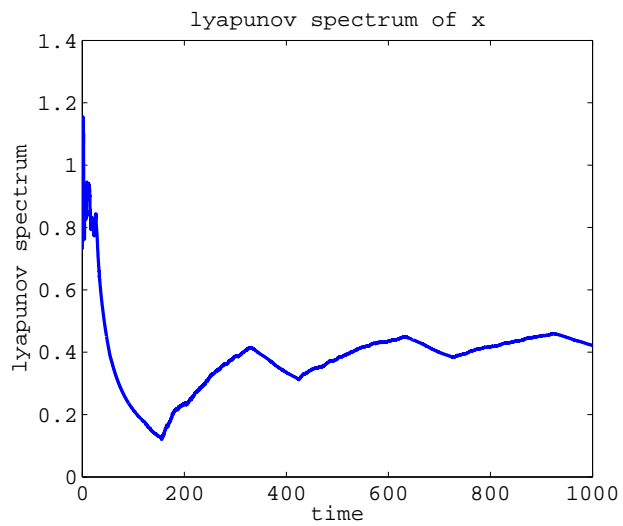
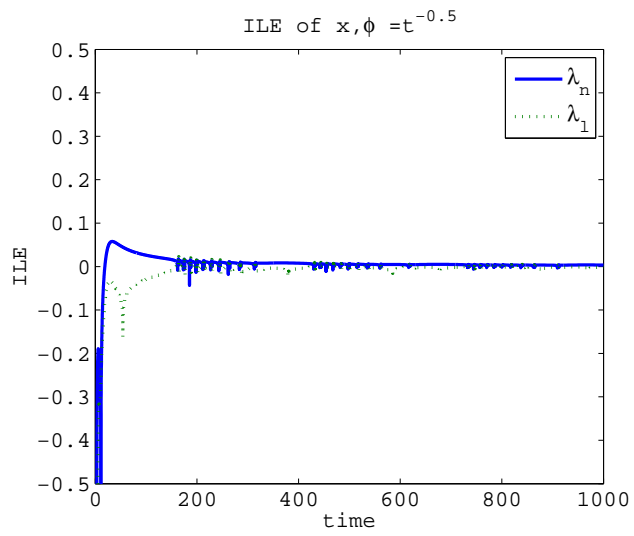
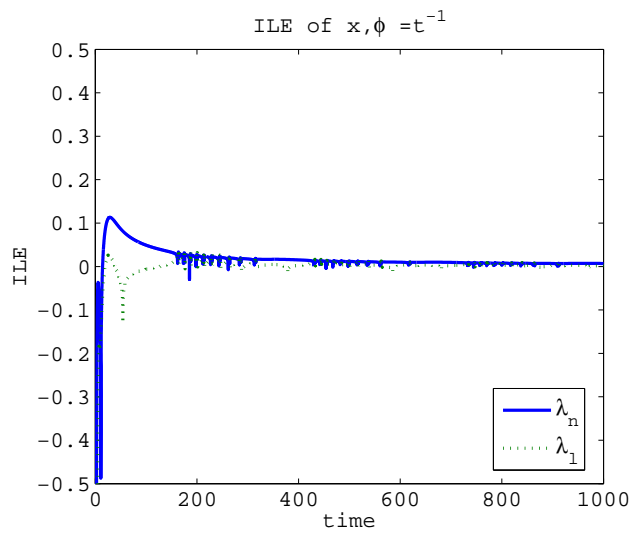


図 5.3: x のリアプノフスペクトラム ($a = 2.8, I = 0.05$)



⊗ 5.4: $x \mathcal{O} \text{ ILE}(a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}})$



⊗ 5.5: $x \mathcal{O} \text{ ILE}(a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t})$

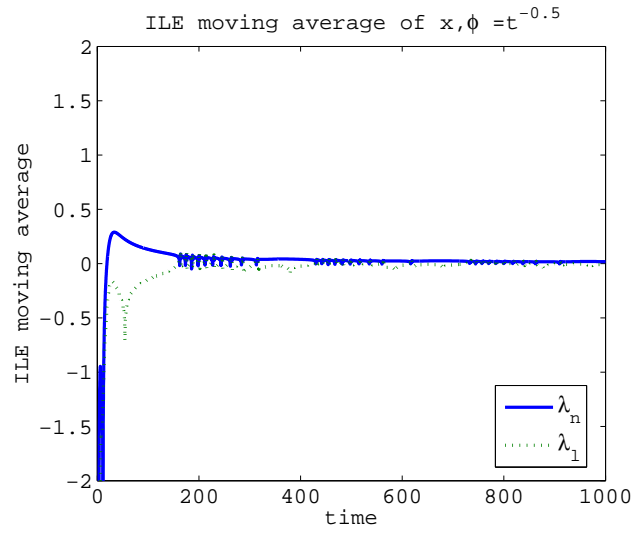


図 5.6: x の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

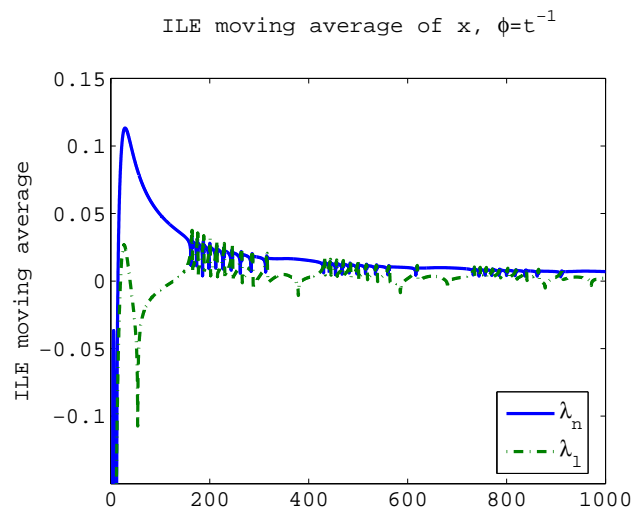


図 5.7: x の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t}$)

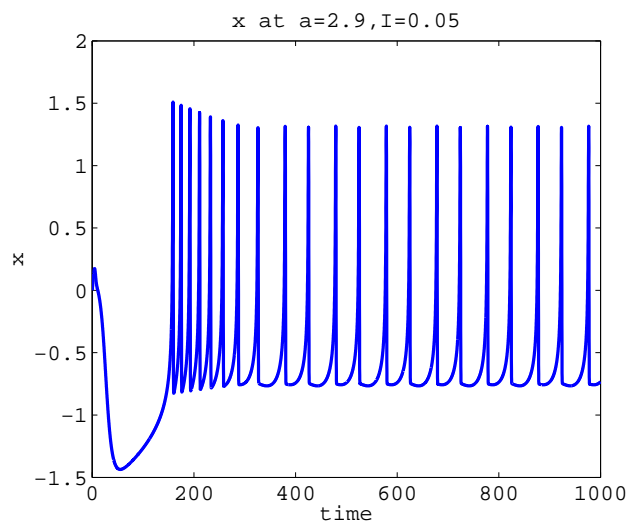


図 5.8: x の応答 ($a = 2.9, I = 0.05$)

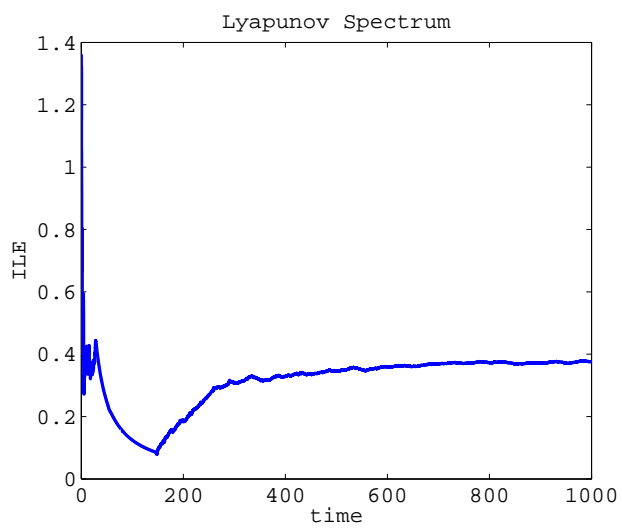
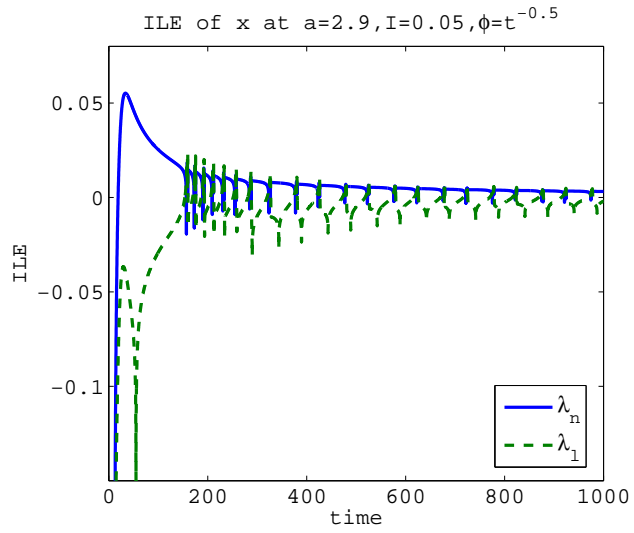
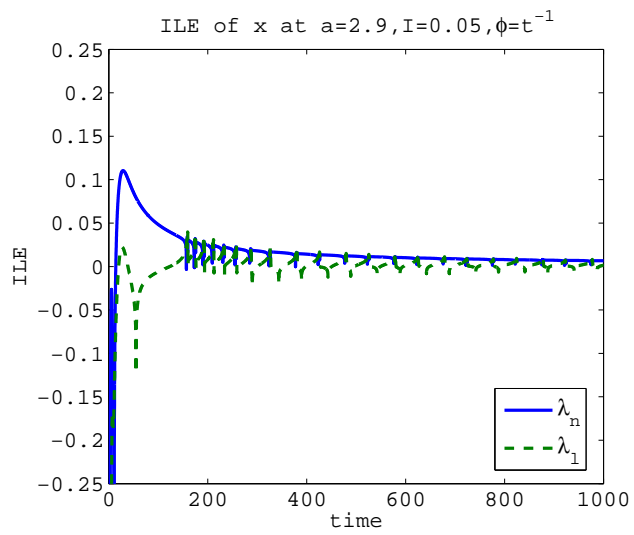


図 5.9: x のリアプノフスペクトラム ($a = 2.9, I = 0.05$)



⊠ 5.10: $x \mathcal{O} \text{ ILE}(a = 2.9, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}})$



⊠ 5.11: $x \mathcal{O} \text{ ILE}(a = 2.9, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t})$

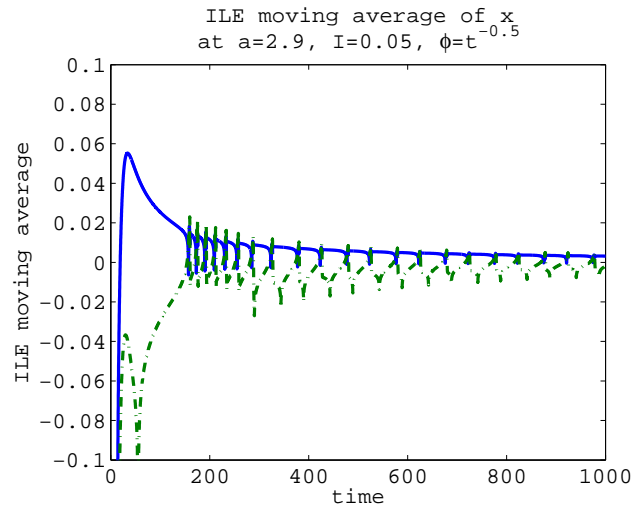


図 5.12: x の ILE 移動平均 ($a = 2.9, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

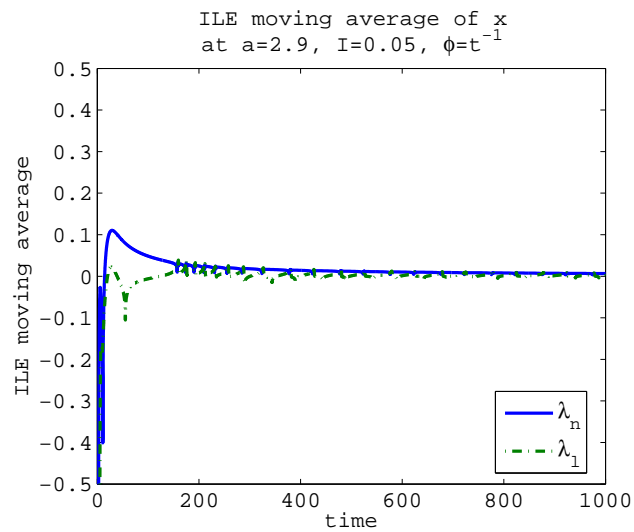


図 5.13: x の ILE 移動平均 ($a = 2.9, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t}$)

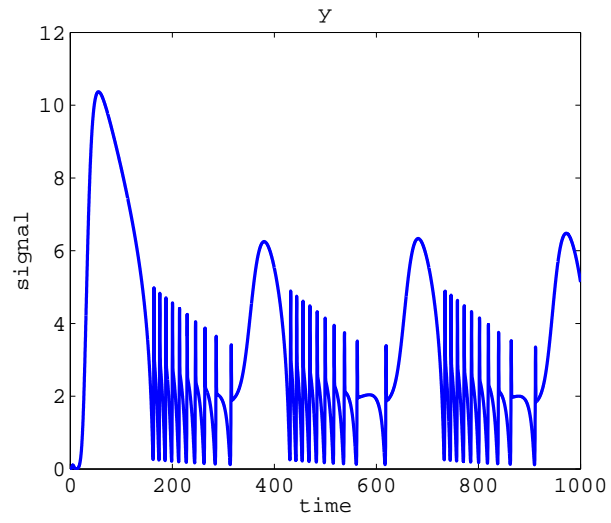


図 5.14: y の応答 ($a = 2.8, I = 0.05$)

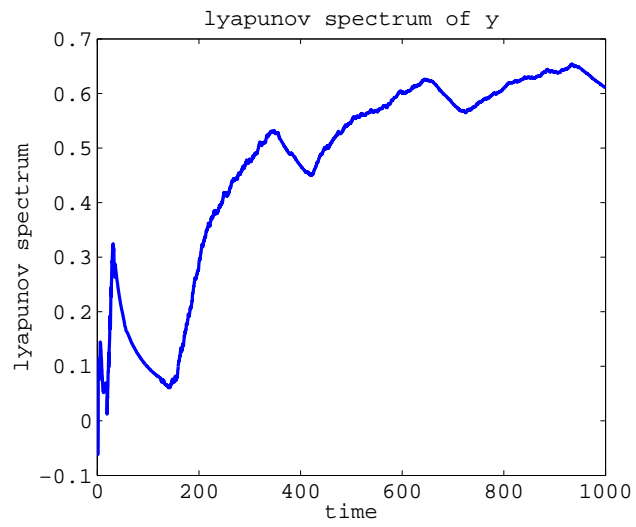


図 5.15: y のリアプノフスペクトラム ($a = 2.8, I = 0.05$)

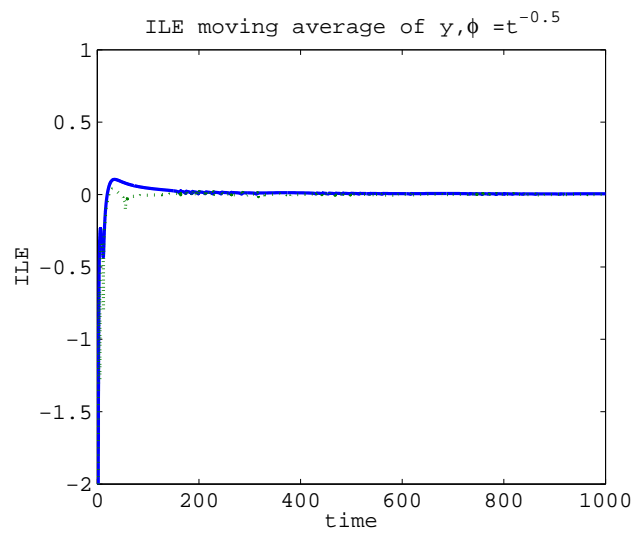


図 5.16: y の ILE ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

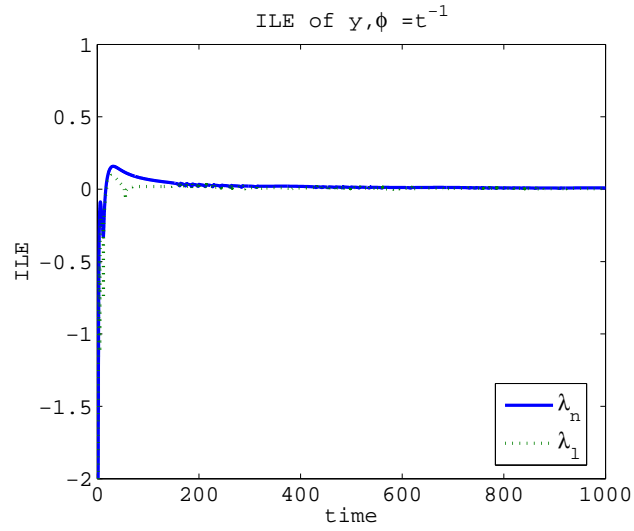


図 5.17: y の ILE ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t}$)

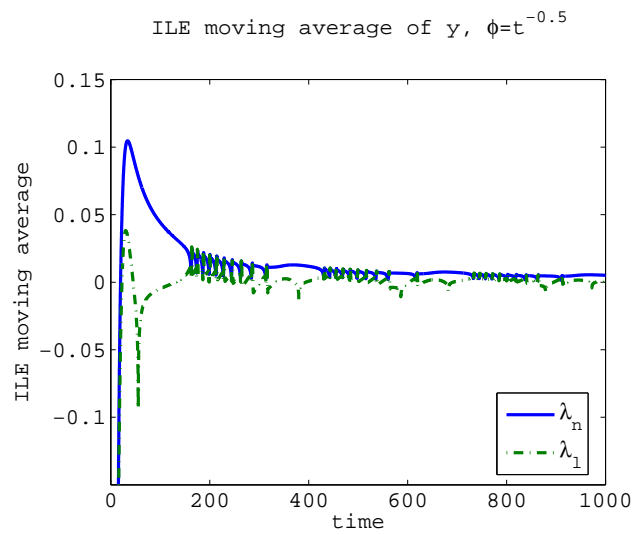


図 5.18: y の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

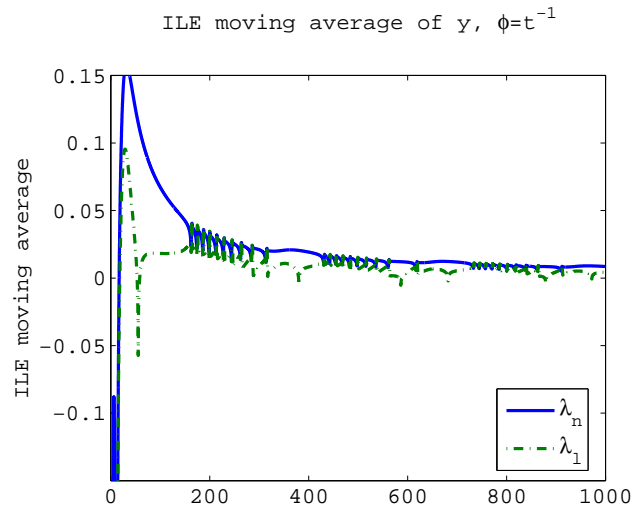


図 5.19: y の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t}$)

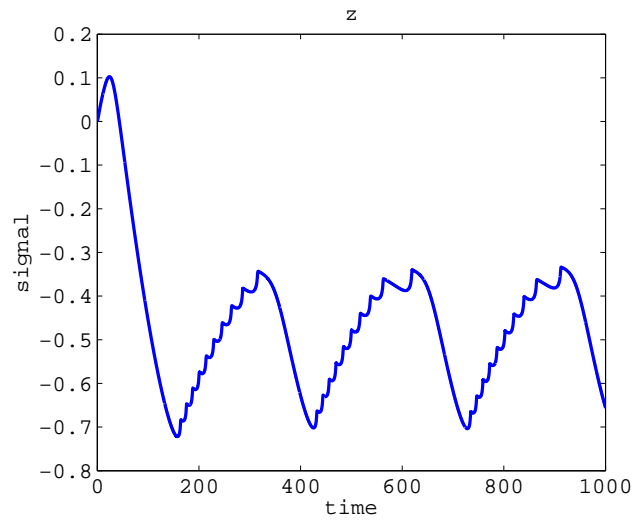


図 5.20: z の応答 ($a = 2.8, I = 0.05$)

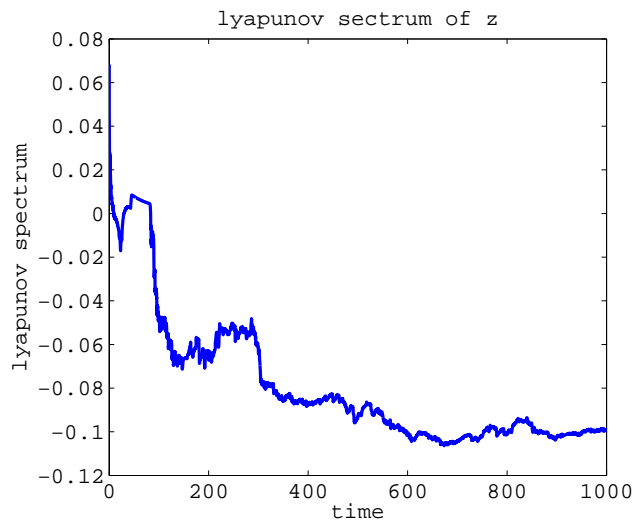


図 5.21: z のリアプノフスペクトラム ($a = 2.8, I = 0.05$)

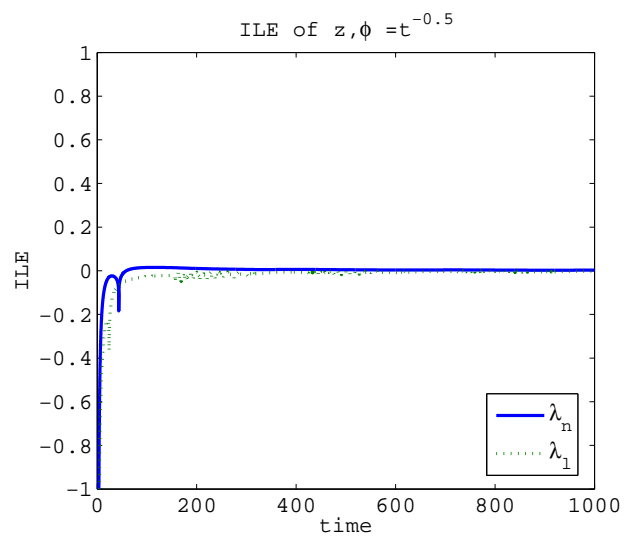


図 5.22: z の ILE ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

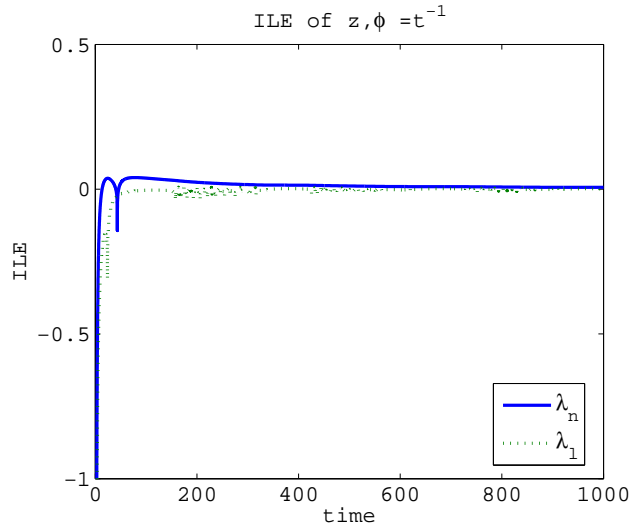


図 5.23: z の ILE ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t}$)

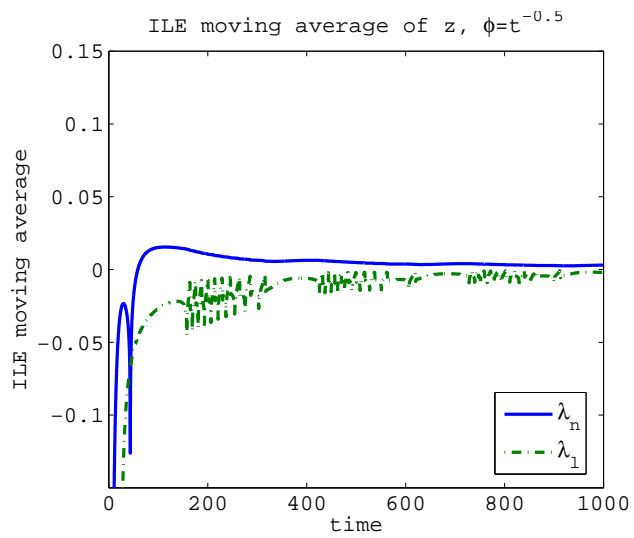


図 5.24: z の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

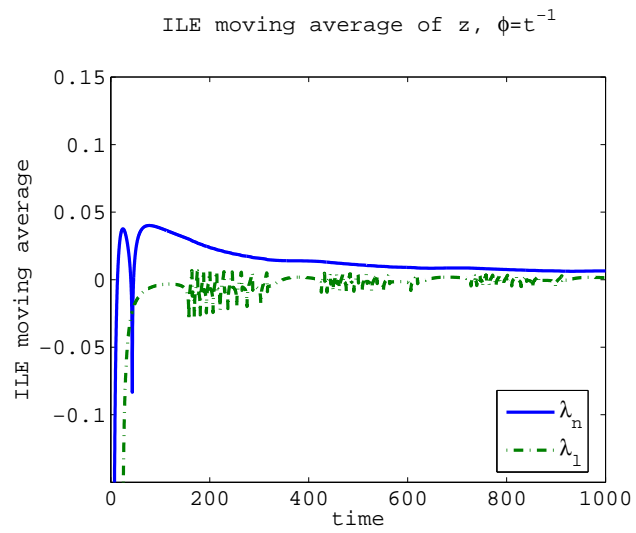


図 5.25: z の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t}$)

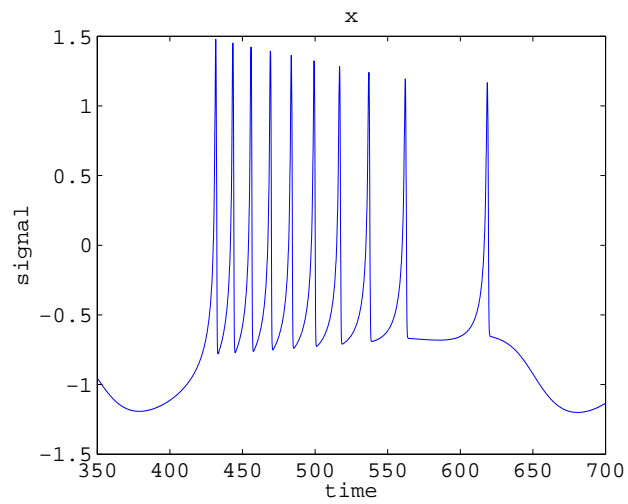


図 5.26: x の応答 (拡大図, $a = 2.8, I = 0.05$)

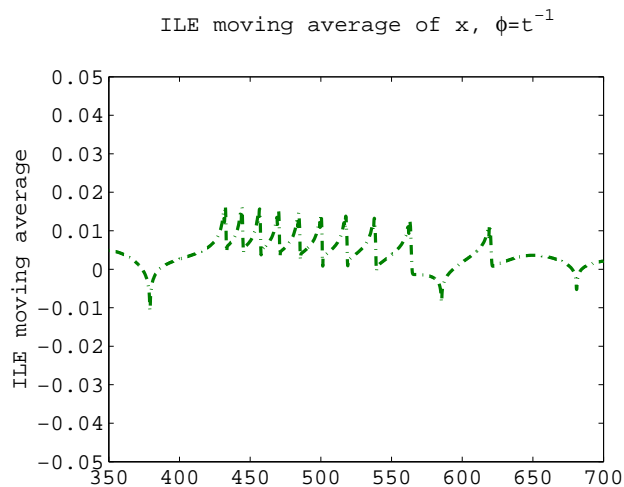


図 5.27: x の λ_t 移動平均 (拡大図, $a = 2.8, I = 0.05$)

5.1.2 CAM 植物モデルへの適用例

本節では Blasius らの提案した CAM 最小モデルの応答に対し ILE を適用し, リミットサイクルにおける ILE の挙動を確認する. CAM モデルのシミュレーションパラメータは前章と同様の表 5.1 のとおりである. また基準関数は他の項目と同様に $(\phi_1, \phi_2) = (\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t})$ とし $T = 0.2246$ の際の挙動についてリアプノフスペクトラムと ILE の算出を行った.

図 5.30 は状態変数 z とその推定値 \hat{z} を表しており, 図 5.31, 5.32 は推定誤差に対する ILE を, 図 5.33 は状態変数と推定値の同期度を表している. 推定自体は状態変数の極大付近でゆらつきが確認できたが, それ以外の部分での推定は可能になっており, そのゆらつきに関しても図 5.31, 5.32 から ILE が時間の経過とともに負になっていることから収束傾向が確認でき, また図 5.33 で同期度がゼロ近辺に存在することからシミュレーション時間範囲では軒並み 5% 前後に誤差が抑えられていることが確認できる. また図 5.34 は推定誤差に対してリアプノフスペクトラムを算出した結果を表している. 図を確認するとわかるように推定誤差が残っている場合部分的に推定ができていてもリアプノフ指数は正の値を示すことがわかる.

また図 5.35, 5.40, 5.45, 5.50 は各状態変数の応答に対するリアプノフスペクトラムを表している. さらに図 5.36 ~ 図 5.39, 図 5.41 ~ 図 5.44, 図 5.46 ~ 図 5.49, 図 5.51 ~ 図 5.54, はシステムの応答に対する ILE についてまとめてあり, それぞれの応答に対して次の順番に表す.

表 5.1: プラントパラメータ

| | |
|------------|------------------------------------|
| C_{ext} | 1 |
| $L(t)$ | 1 |
| T | 0.2238,0.2242,0.2246,0.2250,0.2254 |
| c | 5.5 |
| c_J | 1 |
| c_R | 1 |
| ϵ | 0.001 |
| τ | 0.35 |
| α | 1.5 |
| w_1 | 0.1 |
| L_K | 0.5 |
| R | 0.1 |
| ϕ_0 | 2 |
| λ | 7 |

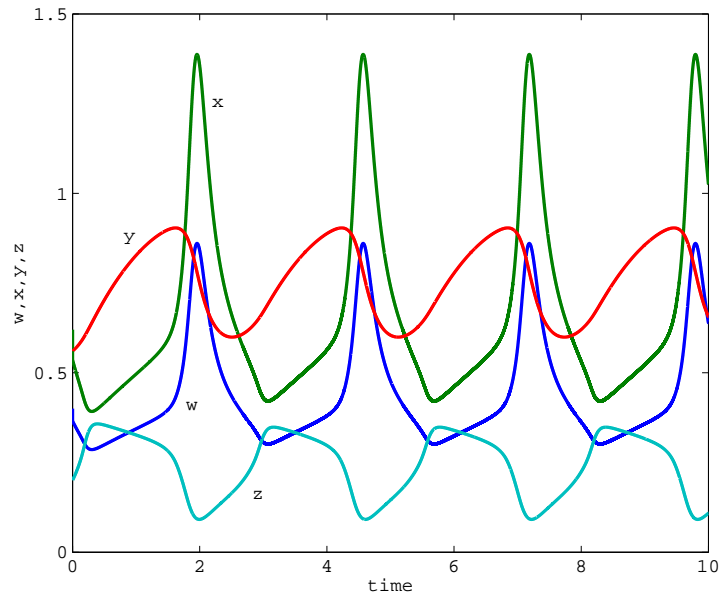


図 5.28: CAM の応答 ($T = 0.2246$)

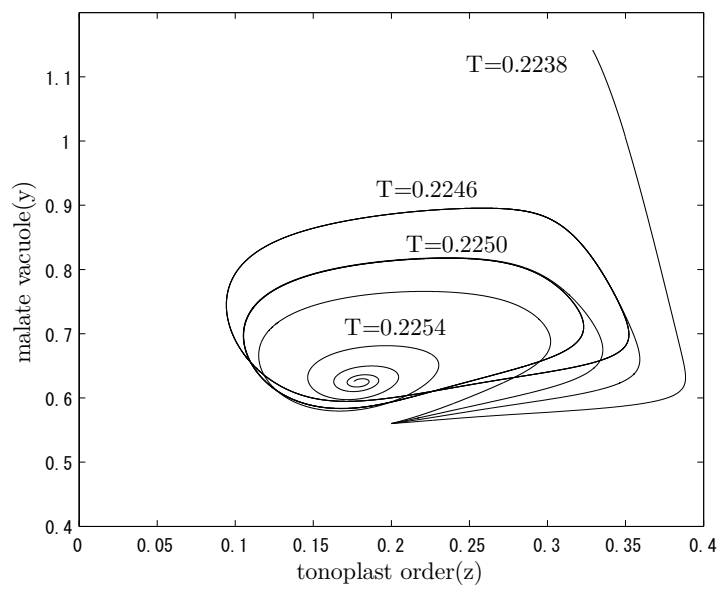


図 5.29: 異なる相対温度 T の連続光下での位相空間動的挙動: $T = 0.2238, 0.2246, 0.2250, 0.2254$.

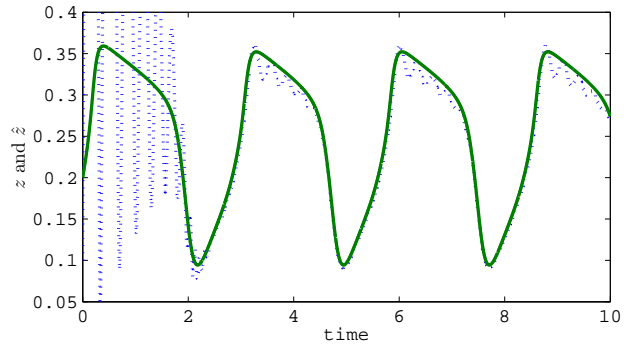


図 5.30: 状態変数 z (実線) と推定値 \hat{z} (点線)

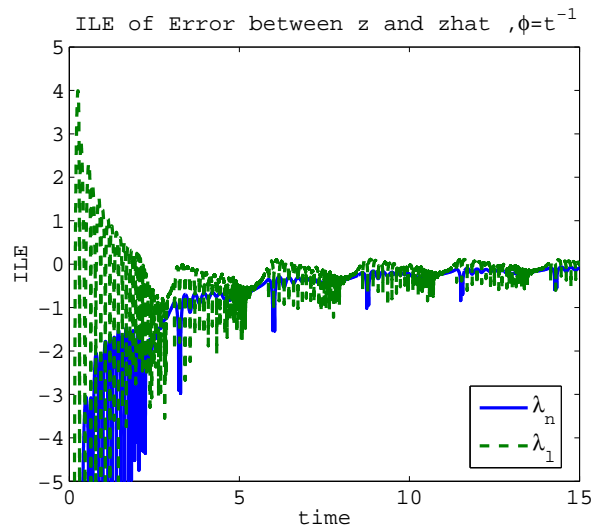


図 5.31: 推定誤差に対する ILE($\phi(t) = \frac{1}{t}$)

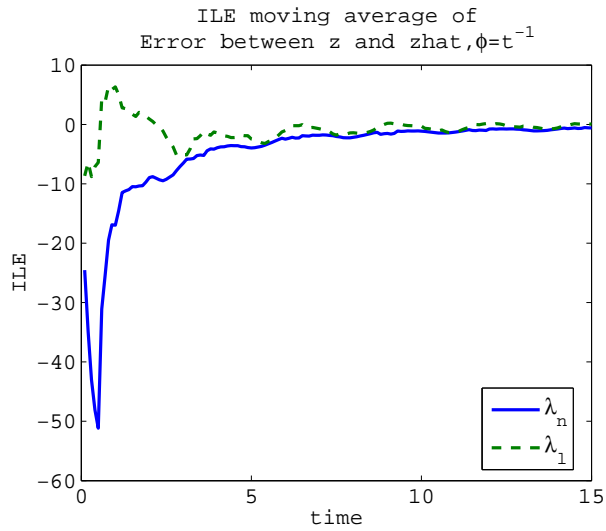


図 5.32: 推定誤差に対する ILE の移動平均 ($\phi(t) = \frac{1}{t}$)

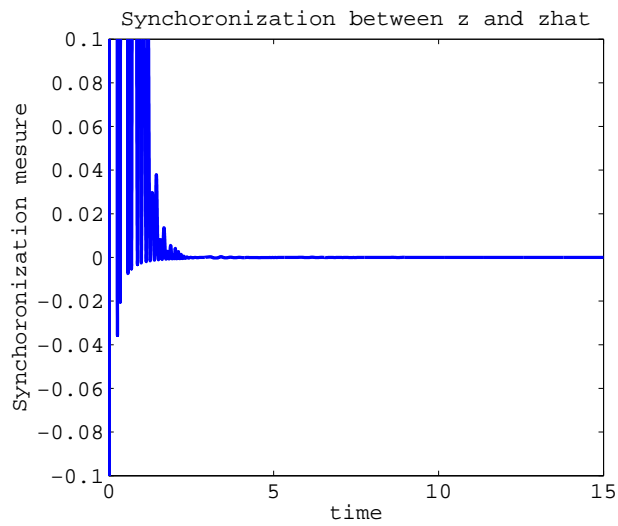


図 5.33: 状態変数 z (実線) と推定値 \hat{z} の同期度

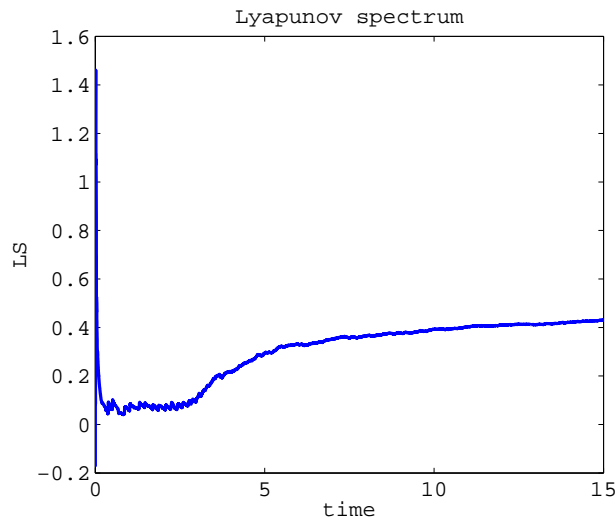


図 5.34: 推定誤差に対するリアプノフスペクトラム

1. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
2. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE λ_n, λ_l
3. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ である場合の ILE の移動平均 $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$
4. 基準関数が $\phi_1 = \frac{1}{t}$ である場合の ILE $\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_l$

これまでと同様にまずリアプノフスペクトラムに注目をする．リミットサイクルを描く変数に対してリアプノフスペクトラムを計算すると負の値をとり続けている (図 5.35, 5.40, 5.45, 5.50) がリアプノフスペクトラムを収束するシステムに対して適用したものと類似しており (図 3.2) 特別な特徴付けを行えてるとは言えない．また CAM の状態応答自体がグラフに表れにくい細かな振動を行っているため，ILE の応答についても特に λ_l がノイズの影響を受けてしまい判別が難しくなっている (図 ?? など)．そのため移動平均に注目するといずれの変数，基準関数を適用した場合でも λ_l において正と負の領域を規則的に往復するような振動する特徴が確認できた．また図 ??, ?? は外部温度を変化させた際の状態変数 y に対する ILE を示しており，実線がリミットサイクルに適用したもの，点線が平衡点へ収束するシステムに適用した結果を表している．図 ??, ?? からわかるように λ_n は基準関数との減衰・増加度を算出するため収束値と違う値で平衡点を持つ際には正の値を示してしまい想定のパフォーマンスを得ることができな

いが, λ_i はフロー自身の減衰・増加度を算出するため想定された性能を維持していると考えられる.

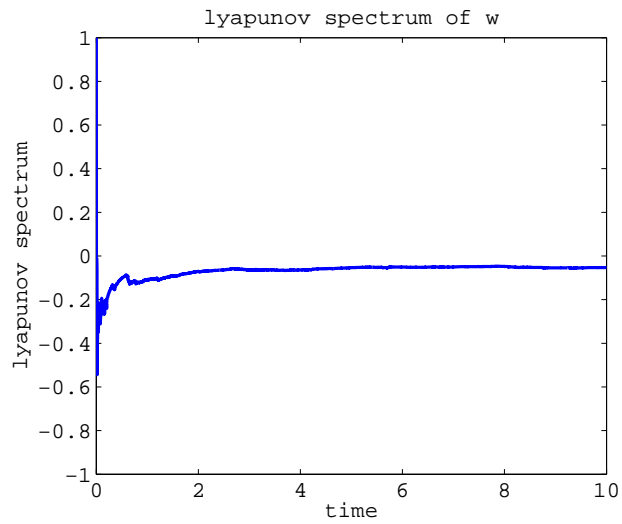
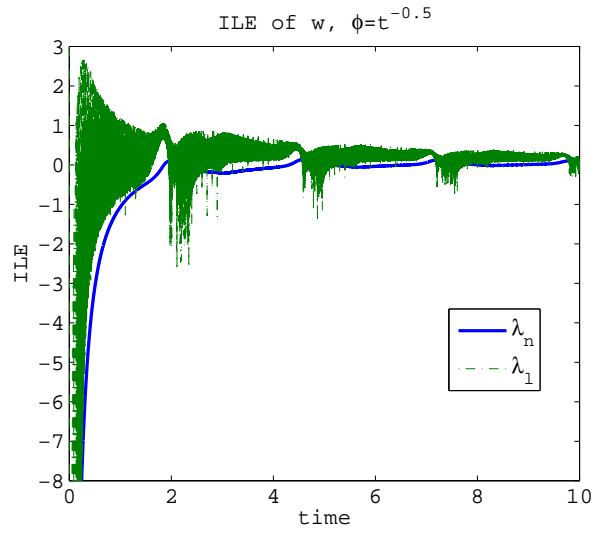
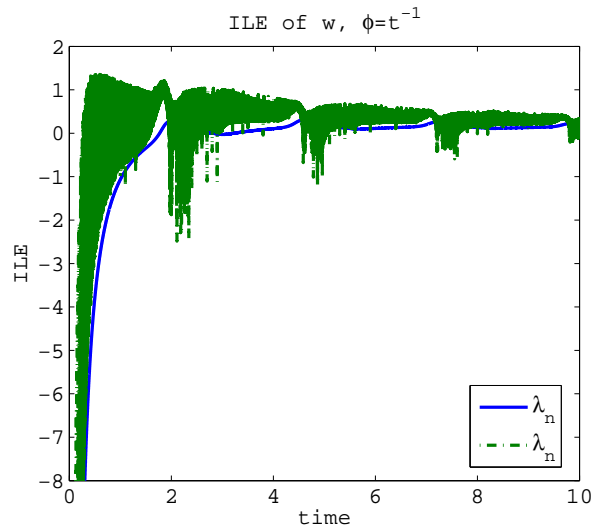


図 5.35: w のリアプノフスペクトラム ($a = 2.8, I = 0.05$)



⊠ 5.36: $w \mathcal{O} \text{ ILE}(a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}})$



⊠ 5.37: $w \mathcal{O} \text{ ILE}(a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t})$

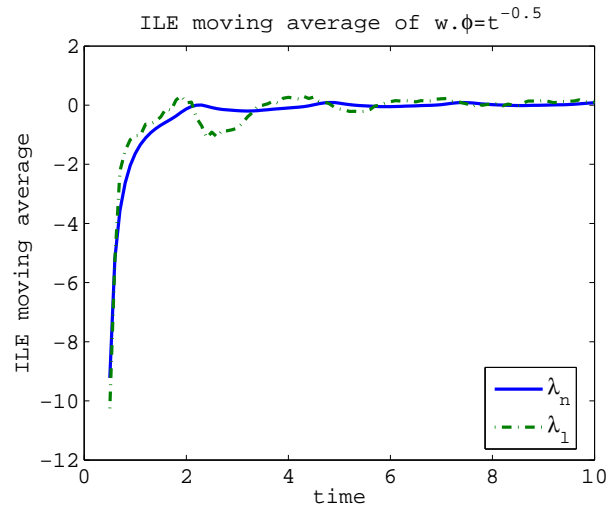


図 5.38: w の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

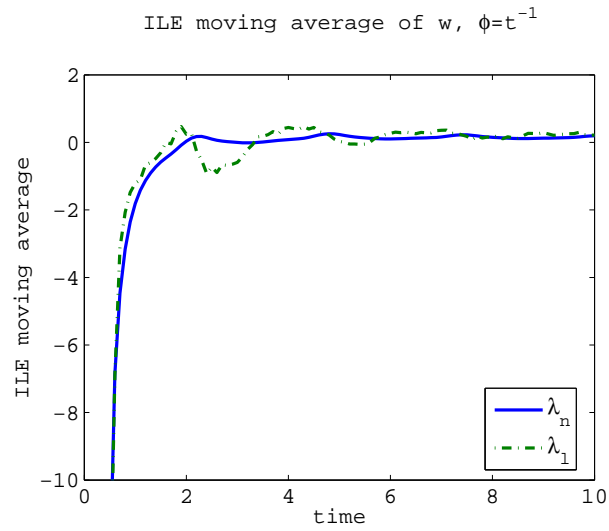


図 5.39: w の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t}$)

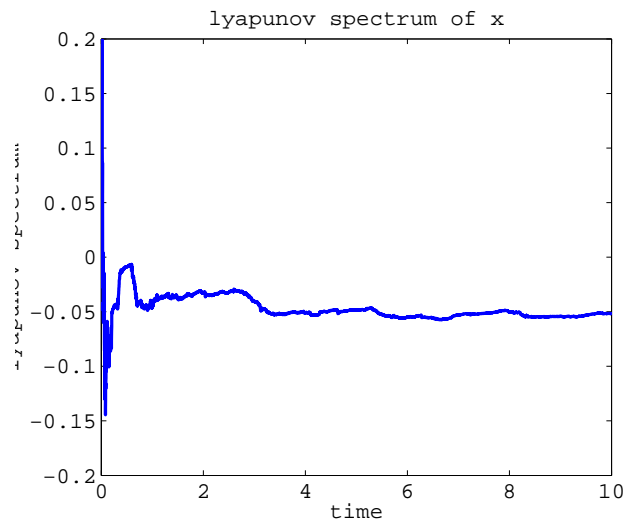


図 5.40: x のリアプノフスペクトラム ($a = 2.8, I = 0.05$)

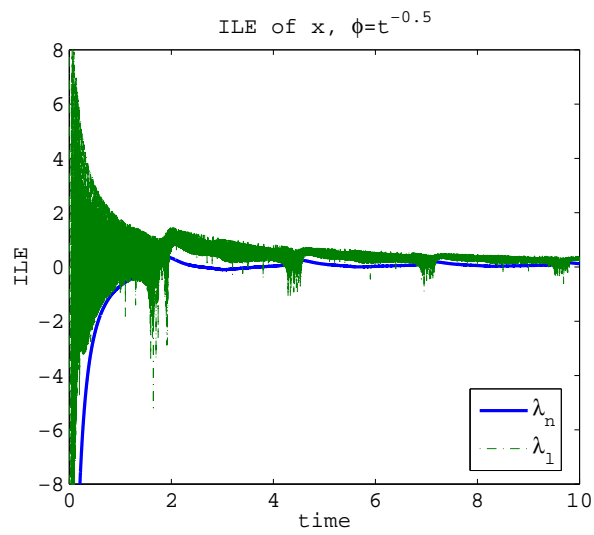


図 5.41: x の ILE ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

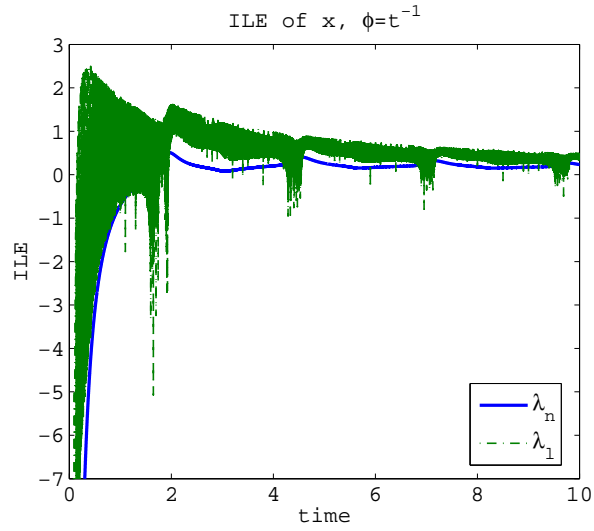


図 5.42: x の ILE ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t}$)

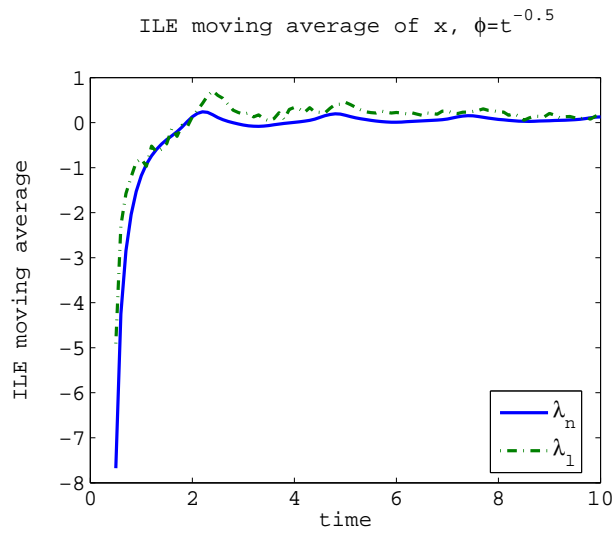


図 5.43: x の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

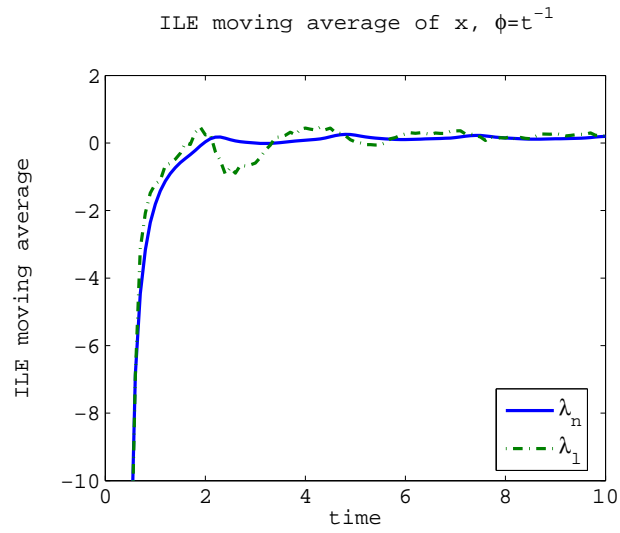


図 5.44: x の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t}$)

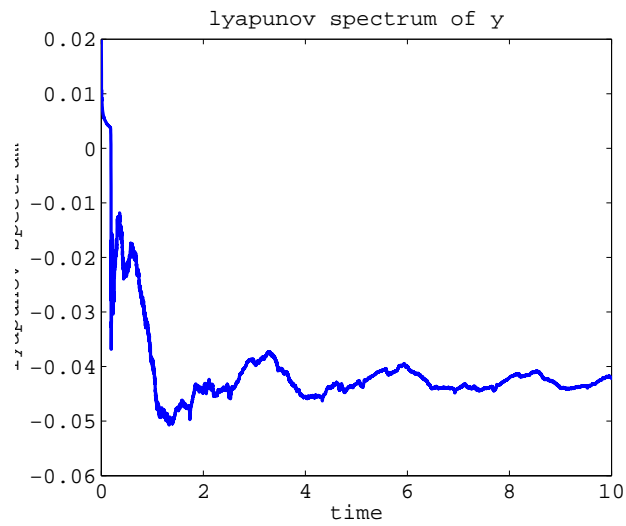
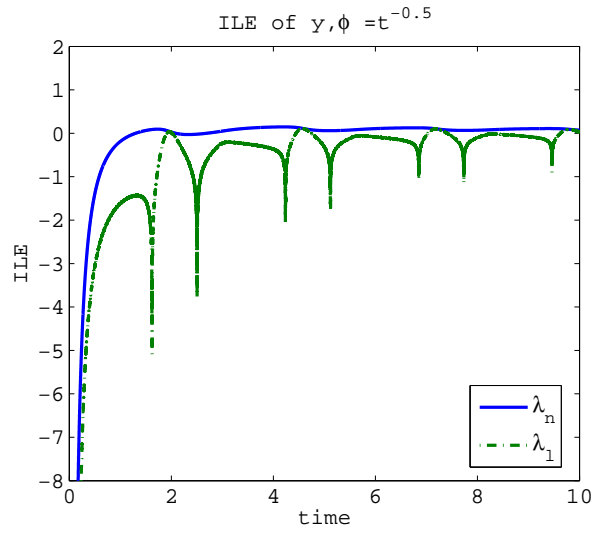
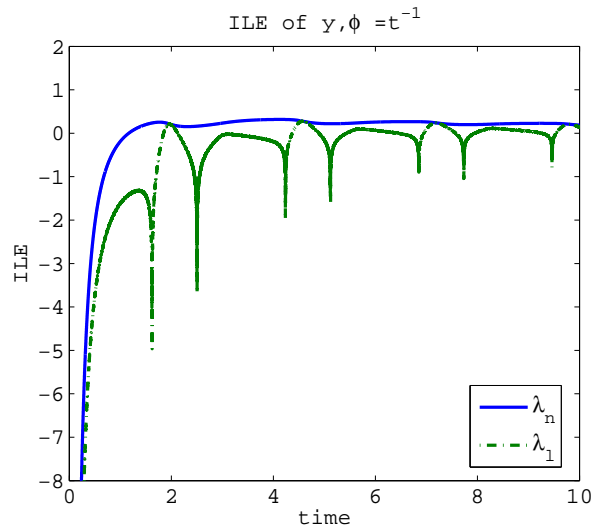


図 5.45: y のリアプノフスペクトラム ($a = 2.8, I = 0.05$)



⊠ 5.46: $y \mathcal{O} \text{ ILE}(a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}})$



⊠ 5.47: $y \mathcal{O} \text{ ILE}(a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t})$

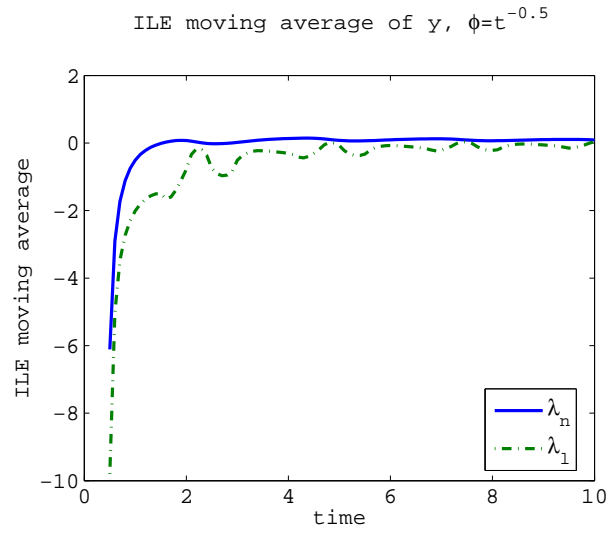


図 5.48: y の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

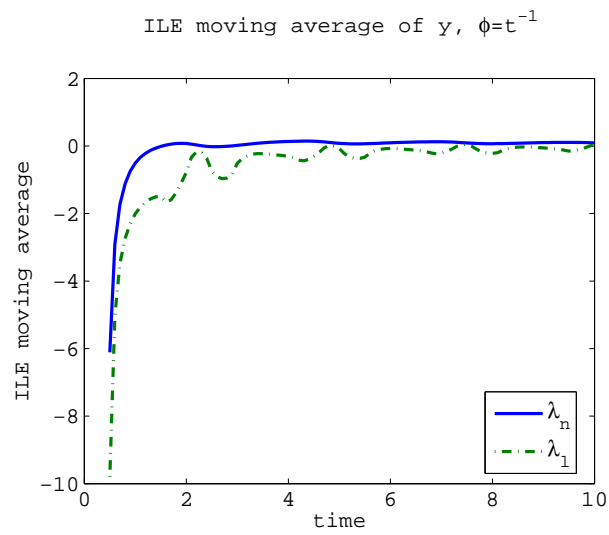


図 5.49: y の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t}$)

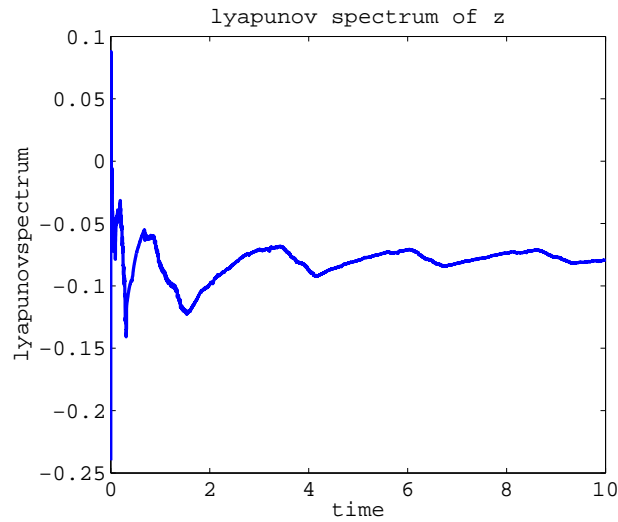
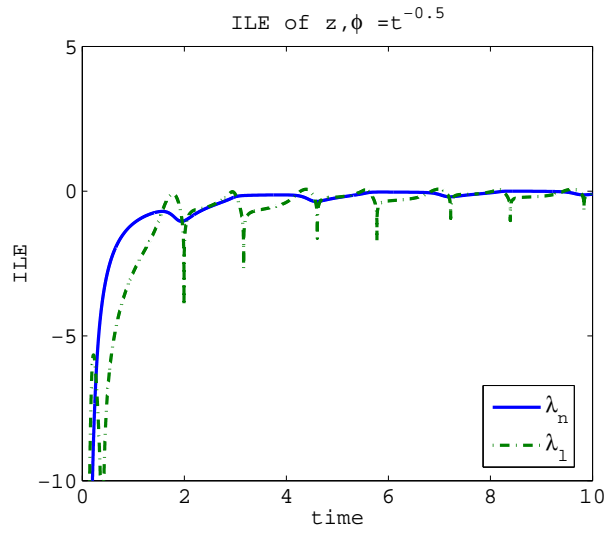


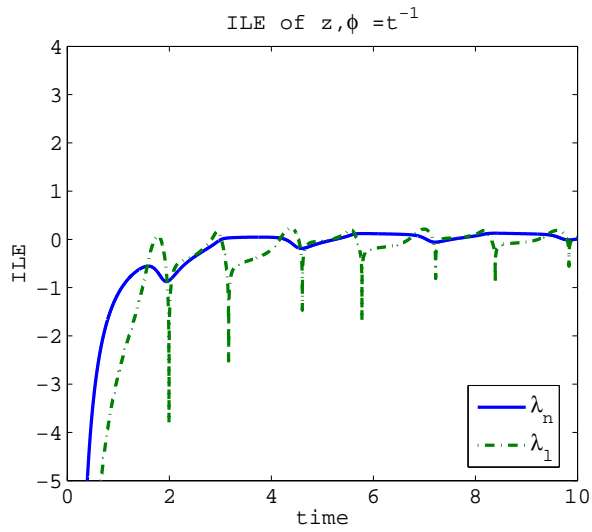
図 5.50: z のリアプノフスペクトラム ($a = 2.8, I = 0.05$)

5.2 まとめ

本章では提案した瞬時リアプノフ指数をリミットサイクル，ヘテロクリニック軌道等，様々な挙動を示す非線形生体システムに適用を行った．リミットサイクルでは平衡点の周りを周期的に動く軌道から正と負の領域を規則的に往復するような振動する特徴が確認でき，ヘテロクリニック軌道ではいくつかの平衡点を移動するという特徴から細かい振動を行う部分を持ちながら正値に収束していく傾向が確認することができカオス軌道とは異なる結果を得ることができた．



⊠ 5.51: $z \mathcal{O} \text{ ILE}(a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}})$



⊠ 5.52: $z \mathcal{O} \text{ ILE}(a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t})$

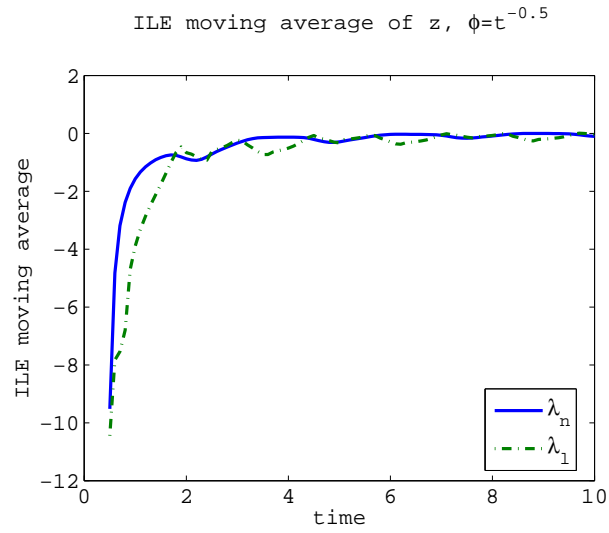


図 5.53: z の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{\sqrt{t}}$)

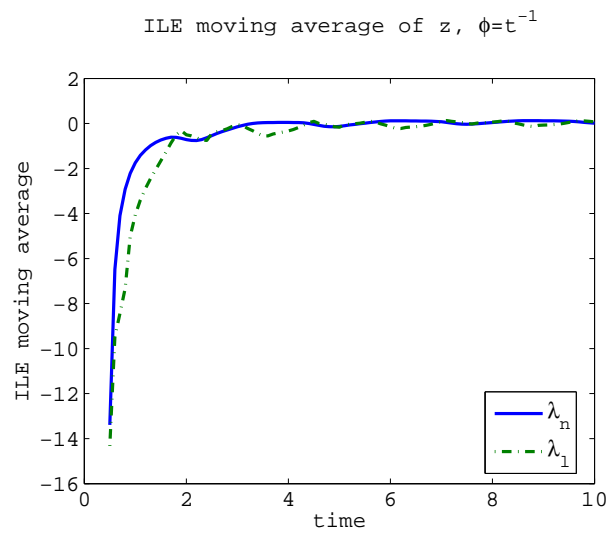


図 5.54: z の ILE 移動平均 ($a = 2.8, I = 0.05, \phi = \frac{1}{t}$)

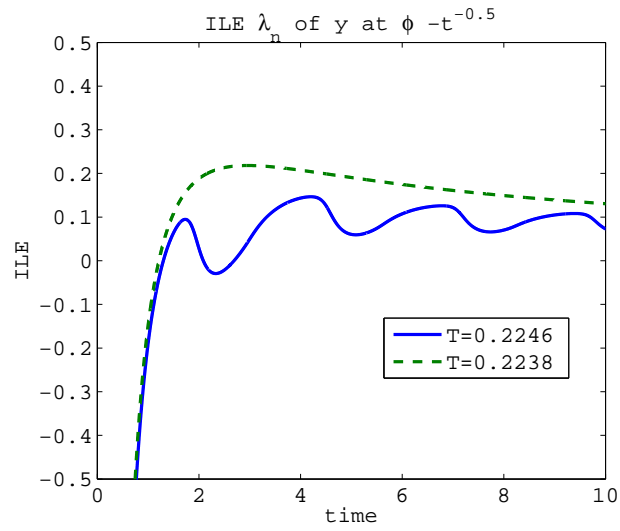


図 5.55: 温度を変化させた場合の $ILE\lambda_n$

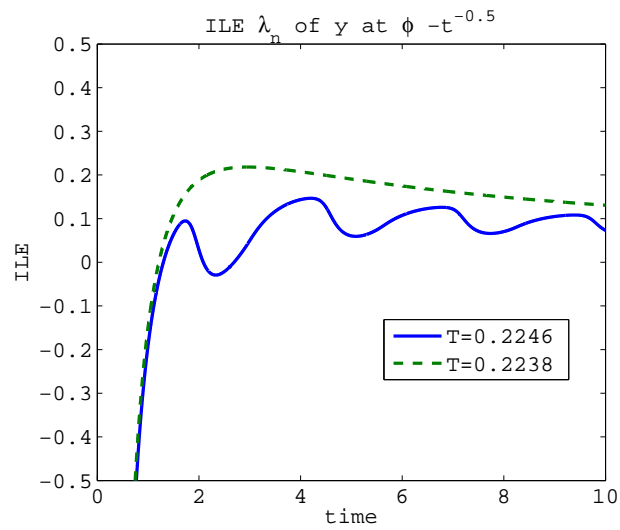


図 5.56: 温度を変化させた場合の $ILE\lambda_l$

第6章 結論

本論文では非線形システムの減衰度推定について瞬時リアプノフ指数という新たな指標を導入し、非線形システムの応答について判別を行う手法を提案しそれを非線形生体システムに適用することによりその有効性の検証を行った。この提案した瞬時リアプノフ指数は対象のシステムの内部状態が未知でも使用でき、算出するために極限を利用しないという点で従来までに提案されたものよりも優れているといえる。

まずこれまで提案されていたリアプノフ指数やそれをを用いた改善案についてその手法と問題点について述べ、それらの問題を解消するような瞬時リアプノフ指数の提案を行った。提案した瞬時リアプノフ指数は基準関数という比較関数を適宜選択することにより指数安定より遅い速度で安定を示すシステムへ対する安定判別も可能になっており、この関数を操作することにより、自らが希望する減衰速度で収束するかといったことも可能である。今回2種類の瞬時リアプノフ指数を提案しており提案した ILE はゼロへ収束する信号の減衰・増加率を示している。もしその信号が時刻 t において基準関数より速く収束する場合 ILE は負の値をとりながら 0 へ収束していく。 λ_l は平衡点への局所減衰率を示しており、 λ_n はゼロへの減衰率を示している。 λ_l を用いた ILE はシステムの安定性をその値から示せることを確認した。また従来提案されているものより速応性のあるケースも存在することを示した。 λ_n は特定の値からどの程度離れているかを示すため誤差方程式等に利用できることを示した。安定性について検証を行う際にはシステムの初期値を用いて正規化を行う等の操作が必要であるといえる。

また2つの信号に対し片方の信号を基準関数にすることによってそれらの信号がどの程度同期しているかを判別させる指標に拡張できることを示した。その際、誤差率を導入することにより容易に判別できるようになり、たとえばあるシステムの信号に対してもう一方の関数を収束値の定数信号にすることにより、そのシステムの整定時間の算出の容易化など様々な利用法が考えられる。

次に提案した瞬時リアプノフ指数を様々なシステムに適用し、リアプノフスペクトラムと比較することにより、その有効性について検証を行った。まずレギュラーでないシステムや Lorenz システムを用いた内部パラメータの同期問題に対し適用することにより瞬時リアプノフ指数の性能の検証を行った。その結果、従来提案されている手

法よりも短い時間で安定性の判別が可能だったり，判定できないシステムでも可能であることを示した．また応用例として，非線形生体モデルとしてCAMリミットサイクルモデルと Hindmarsh-Rose ニューロンモデルに対して瞬時リアプノフ指数を適用することにより，リミットサイクル・ヘテロクリニック軌道の場合，どのような挙動を行うかを検証した．

謝辞

本研究を進めるにあたって多くの方々に御指導と御助力を賜りました。

まず、大分大学工学部福祉環境工学科の松尾孝美教授に終始一貫した研究指導理念のもとに各段階において非常に多くの有益な御示唆と絶えず暖かい励ましと熱心な御指導をいただきました。生涯忘れぬこの御恩に謹んで深謝申し上げます。

本論文の審査を進めるにあたっては、非常に有益なご指摘や御意見をいただきました、大分大学工学部福祉環境工学科の今戸啓二教授、小川幸吉教授、大分大学工学部電気電子工学科の柴田克成准教授、大分大学工学部機械・エネルギーシステム工学科の高坂拓司准教授に深く御礼申し上げます。

また本研究を進めるうえで、研究室の諸氏の御協力に感謝いたします。特に末光治雄助教には多くの御支援をいただき御礼申し上げます。

最後に学生・研究生活を支えていただいた両親、親友に感謝申し上げます。

参考文献

- [1] A. Maybhate and R. E. Amritkar: “Use of synchronization and adaptive control in parameter estimation from a time series”, *Physical Review E*, 59, pp.284-293, 1999.
- [2] C. Zhou and C.H. Lai: “Analysis of spurious synchronization with positive conditional Lyapunov exponents in computer simulations”, *Physica D*, 135, pp.1-23, 2000.
- [3] D. Huang and R. Guo: “Identifying parameter by identical synchronization between different systems”, *Chaos*, 14-1, pp.152-159, 2004.
- [4] G.A. Leonov: “Generalization of the Andronov-Vitt Theorem”, *Regular and Chaotic Dynamics*, 11-2, pp.281–289, 2006.
- [5] S. Yoden and M. Nomura: “Finite-Time Lyapunov Stability Analysis and Its Application to Atmospheric Predictability”, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 50-11, pp.1531-1543, 1993.
- [6] X.Zeng, R.Eykholt, and R.A.pielke: “Estimating the Lyapunov-exponent spectrum from short time series of low precision”, *Phy. Rev. Lett.*, 66, pp.3229-3232, 1991.
- [7] T.Caraballo: “On the decay rate of solutions of nonautonomous differential systems”, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2001-05, pp.1-17, 2001.
- [8] K.Shin and J.K.Hammond “The Instantaneous Lyapunov Exponent and Its Application to Chaotic Dynamical Systems”, *Journal of Sound and Vibration*, 2001-05, pp.1-17, 2001.
- [9] Y.Totoki and T.Matsuo: “Decay/Growth Rate Estimation Using Instantaneous Lyapunov Exponent”, *Int. J.Bifurcation and Chaos*, accepted.

- [10] T.Matsuo, S.Wada and H.Suemitsu: “Model-Based and Non-Model-Based Velocity Estimators for Mobile Robots”, *Int.J.Innovating Computing, Information and Control*, 4-12,pp.3123-3133,2008.
- [11] F.Colonius and W.Kliemann: “The Lyapunov spectrum of families of time-varying matrices”, *Trans.Amer.Math.Soc.*, 348,pp.4389-4408, 1996.
- [12] H.Fujisawa and T.Yamada: “Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems”, *Proc.Theor. Phys.*, 69,pp.32-47, 1983.
- [13] H.Haken: “Advanced Synergetics:Instability Hierarchies of Self-Organizing Systems and Devices”, *Springer*, 1983.
- [14] L.M.Pecora and T.L.Carroll: “Synchronization in Chaotic Systems”, *Physical Review Letters*, 64-8,pp.821-824, 1990.
- [15] S.Rugonyi and K.-J. Bathe: “An evaluation of the Lyapunov characteristic exponent of chaotic continuous systems”, *Int.J.for Numerical Methods in Engineering*, 56,pp.145-163,2003.
- [16] J.W.Shuai and K.W.Wong: “Simple approach to the creation of a strange non-chaotic attractor in any chaotic system”, *Physical Review E*, 59,pp.5338-5343,1999.
- [17] W.Kinsner: “Characterizing Chaos Through Lyapunov Metrics”, *Proc. of the Second IEEE International Conference on Cognitive Infomatica*, 2003.
- [18] T.Nomura,Y.Kitsuka and T.Matsuo: “Nonmodel-Based Estimation for Velocity and Acceleration by Adaptive Identification Method”, *IEEJ Trans. on Electrical and Electronic Engineering*, 5-3,372-374.
- [19] J.keener,and J.Sneyd(中垣俊之監訳): 数理生理学 , 上細胞生理学, 日本評論社, 2005
- [20] R.E.Plant: “ Bifurcation and resonance in a model for bursting nerve cell”, *J.of Mathematical Biology*, 11,1532,1981
- [21] I.Atwater,L.Rosario,and E.Rojas: “ Properties of calcium-activated potassium channels in the pancreatic β -cell”, *Cell Calcium*, 4,451-4612,1983

- [22] A.Sherman,J.Rinzel,and J.Keizer: “Emergence of organized bursting in cluster of pancreatic β -cells by channel sharing”, *Biophysical Journal*, 54,411-425,1988
- [23] T.R.Chay and H.S.Kang: “Multiple oscillatory states and chaos in the endogenous activity of excitable cell: pancreatic β -cell as an example”, Ed: H.Degn, A.V \grave{c} Holden, and L.F.Olsen,, Plenum Press, New York,1987
- [24] J.L.Hindmarsh and R.M.Rose: “A model of the nerve impulse using two first order differential equations”, *Nature*, 296,162-164,1982.
- [25] J.L.Hindmarsh and R.M.Rose: “A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations”, *Proc.R.Soc.Lond.B.*, 221,87-102,1984.
- [26] M.Pernarowski: “Fast subsystem bifurcations in a slow varying Lienard system exhibiting bursting”, *SIAM J.on Applied Math.*, 54,814-832,1994
- [27] I.Belykh,E.de Lange, and R.M.Hasler: “Synchoronization of Bursting Neurons: What Matters in the Network Topology”, *Phys.Rev.Lett.*, 94,188101,2005.
- [28] E.M.Izhikevich: “Simple Model of Spiking Neurons”, *IEEE Trans on Neural Networks*, 14-6,1569-1572,2003.
- [29] E.M.Izhikevich: “Which model to use for cortical spiking neurons?”, *IEEE Trans on Neural Networks*, 15-5,1063-1070,2004.
- [30] P.Arena,L.Fortuna,M.Frasca,M.L.Rosa: “Locally active Hindmarsh-Rose neurons”, *Chaos,Soliton and Fractals*, 27,405-412,2006.
- [31] K.S.Narendra and A.M.Annaswamy: “Stable Adaptive Systems”, *Prentice Hall Inc.*, 1989.
- [32] H.Yu and Y.Liu: “Chaotic synchoronization based on stability criterion of linear systems”, *Physics Letters A*, 314,292-298,2003.
- [33] Koichi Mitsunaga, Yusuke Totoki, and Takami Matsuo: “Firing Pattern Estimation of Biological Neuron Models by Adaptive Observer”, *ICONIP2007,Part ,Lecture Notes in Computer Science*, 4984,83-92,2008.

- [34] Yusuke Totoki, Koichi Mitsunaga, Haruo Suemitsu, and Takami Matsuo: “Firing Pattern Estimation of Synaptically Coupled Hindmarsh-Rose Neuron by Adaptive Observer”, *ICANN2008, Lecture Notes in Computer Science*, 5164, 338-347, Springer, 2008.
- [35] T.E.E. Grams, A.M. Borland, A. Roberts, H. Griffiths, F. Beck and U. Lüttge : “On the mechanism of reinitiation of endogenous CAM-rhythm by temperature changes”, *Plant Physiol.*, 113, 1309-1317, 1997.
- [36] B. Blasius, F. Beck and U. Lüttge : “A model for photosynthetic oscillations in crassulacean acid metabolism (CAM)”, *J. Theor. Biol*, 184, 345-351, 1997.
- [37] B. Blasius, F. Beck and U. Lüttge : “Oscillatory model of crassulacean acid metabolism : structural analysis and stability boundaries with a discrete hysteresis switch”, *Plant, Cell and Environment*, 21, 775-784, 1998.
- [38] R. Neff, B. Blasius, F. Beck and U. Lüttge : “Thermodynamics and energetics of the tonoplast membrane operating as a hysteresis switch in an oscillatory model of crassulacean acid metabolism”, *J. Memb. Biol.*, 165, 37-43, 1998.
- [39] B. Blasius, R. Neff, F. Beck and U. Lüttge : “Oscillatory model of crassulacean acid metabolism with a dynamic hysteresis switch”, *Proc. R. Soc. Lond. B*, 266, 93-101, 1999.
- [40] F. Beck, B. Blasius, U. Lüttge, R. Neff and U. Rascher : “Stochastic noise interferes coherently with a model biological clock and produces specific dynamic behaviour”, *Proc. R. Soc. Lond. B*, 268, 1307-1313, 2001.
- [41] Yusuke Totoki, Takami Matsuo, Meihong Zheng, and Osamu Hoshino : “Local intracortical circuitry not only for feature binding but also for rapid neuronal responses”, *Cognitive Processing*, 11, 347-357, 2010.
- [42] Yusuke Totoki, Kouichi Mitsunaga, Haruo Suemitsu and Takami Matsuo : “Firing Pattern Estimation and Synchronization Detection of Synaptically Coupled Hindmarsh-Rose Neurons”, *Neural Network World*, 9-5, 483-497, 2009.
- [43] Takami Matsuo, Yusuke Totoki, Haruo Sumitsu : “Robustness and Security of H-infinity-Synchronizer in Chaotic Communication Systems”, “Challenges and

Paradigms in Applied Robust Control” Edited by Andrzej Bartoszewicz, ISBN 978-953-307-338-59.

- [44] 松尾孝美, 十時優介, 末光治雄: “適応オブザーバによる CAM 植物光合成リズムの内部状態推定”, 計測と制御, 49-7, 451-456, 2010.
- [45] Akira Goto, Yusuke Totoki, Haruo Suemitsu, and Takami Matsuo: “Adaptive Observer-Based Controller for Biological Clock in Crassulacean Acid Metabolism”, Proceedings of 2011 8th Asian Control Conference (ASCC), Kaohsiung, Taiwan, 500-505, 2011.
- [46] Yusuke Totoki, Akira Goto, Haruo Suemitsu, and Takami Matsuo: “Synchronization Detection of Biological CAM Plants Using Instantaneous Lyapunov Exponent”, proc. of SICE Annual Conference 2010, 514-519, 2010.
- [47] Ryuta Ito, Yusuke Totoki, Haruo Suemitsu, and Takami Matsuo: “Adaptive Estimation of Firing Patterns of Hindmarsh-Rose Neurons and Synchronization Detection with Instantaneous Lyapunov Exponents”, proc. of SICE Annual Conference 2010, 1743-1748, 2010.
- [48] Yusuke Totoki, Haruo Suemitsu, and Takami Matsuo: “On Robustness against Temperature Changes of Adaptive Estimator for CAM Plants”, Proc. of the 34th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, 7-12, 2010.
- [49] Yusuke Totoki, Ryuta Ito, Haruo Suemitsu, and Takami Matsuo: “Simultaneous Parameter and Input Estimation of Hindmarsh-Rose Neuron by Adaptive Observer”, Proc. of ICCAS-SICE 2009, 4896-4901, 2009.
- [50] Yusuke Totoki, Haruo Suemitsu, and Takami Matsuo: “Decay Rate Estimation of Continuous Time Series Using Instantaneous Lyapunov Exponent”, Proc. of ICCAS-SICE 2009, 5073-5077, 2009.
- [51] Ryuta Ito, Yusuke Totoki, Haruo Suemitsu, and Takami Matsuo, Yusuke Totoki, Haruo Sumitsu: “Adaptive Input Estimation of a Hodgkin-Huxley Neuron”, Proc. of ICCAS-SICE 2009, 4896-4901, 2009.

- [52] Yusuke Totoki, Haruo Suemitsu and Takami Matsuo : “Nonlinear Dynamics Estimation of CAM Plants Using Slow Manifolds”, Proc. of SICE Annual Conference 2008, 1877-1882 ,2008.
- [53] Masayuki Oka, Yusuke Totoki, Haruo Suemitsu and Takami Matsuo : “Adaptive Observer for Biological Clock of Crassulacean Acid Metabolism with Partial States”, Proc. of Second International Conference on Innovative Computing, Information and Control (ICICIC-2007), C07-09.pdf (4 pages).