

第3章 乾燥を受けるコンクリート部材の水分移動

3.1 はじめに

コンクリート部材内に含まれる水分量はコンクリートの物性に影響を与え、コンクリートの強度発現、収縮、クリープの進行などと密接な関係があり、水分が移動することによりコンクリートの挙動を変えることになる。従って、含有水分量を把握することは、コンクリートの中酸化、鉄筋の発錆、アルカリ骨材反応の進行などによる劣化現象を究明し、対策を講じる上で有益な情報をもたらすことになる。コンクリート部材内の水分量の分布に関する研究は古くから行われており[3.1] [3.2] [3.3]、最近でもコンクリートの細孔構造に基づくモデルを用いて解析が行われている[3.4]。しかしながら、含有水分量を測定する信頼の高い方法は未だ開発されておらず[3.5] [3.6] [3.7]、最近ではセラミックセンサ[3.8]、[3.9]や、ステンレス製電極[3.10]を埋込んで含有水分量の測定を行っている例がある。

コンクリートのクリープや乾燥収縮のメカニズムについては、コンクリート中の水分の挙動と関連づけて考察される。特に乾燥収縮のメカニズムは巨視的に見ればコンクリート内部と環境との湿度勾配に起因する水分移動によって説明される。コンクリート中の水分移動を支配する方程式としては、拡散方程式または熱伝導方程式として知られている偏微分方程式が用いられる。拡散方程式を用いてコンクリート中の水分移動と乾燥収縮の問題を論じた初期の研究としては、Pickett[3.11]や吉田[3.12]の研究がある。

本研究ではコンクリートの乾燥収縮ひび割れの予測を行うことを目的としているため、内部応力を正確に計算する必要がある。内部応力の計算のためには、コンクリート部材内で応力の発生源となる微小要素の固有ひずみの分布を知る必要がある。本研究での乾燥収縮応力解析は、これを脱水量との関係で推測することにしてしているため、まず含有水分量の分布を求めなければならない。

以上のことから本章では、まず、温度一定の場合の水分に移動に対して、従来用いられてきた拡散理論を適用し、これを若材齢からの乾燥の問題にも適用できるように拡張し、コンクリート部材内の含有水分量の分布を予測することを試みた。

3.2 部材内の水分量の分布

3.2.1 基礎方程式

コンクリートの乾燥収縮過程における水分の移動を拡散現象と仮定する。部材内の任意の点における含有水分量の変化は図 3.2.1 のように考えることができる。いま、単位時間に単位面積あたりを通して流れる量として定義される流量を q とすると次に示す連続式が成立する。

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = -\text{div } q - \frac{\partial w_n}{\partial t} \quad (3.2.1)$$

q は部材内のある点でのポテンシャル差に比例するものと考えられる。ポテンシャル差は水分移動の駆動力となるもので、このポテンシャルは水分移動に関する水分である蒸発可能水 w_e の持つ自由エネルギー、すなわち Gibbs の自由エネルギー μ として表すことができ、 q は次式で表される。

$$q = -a \text{ grad } \mu \quad (3.2.2)$$

ここに、 a : 比例定数

式(3.2.2)を式(3.2.1)に代入すると

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \text{div } (a \text{ grad } \mu) - \frac{\partial w_n}{\partial t} \quad (3.2.3)$$

となり、式(3.2.3)が、コンクリート部材内の水分移動を表す基礎方程式となる。また、式(3.2.3)における μ に対しては、水蒸気を理想気体と仮定すれば、次式に示す関係式が適用される。

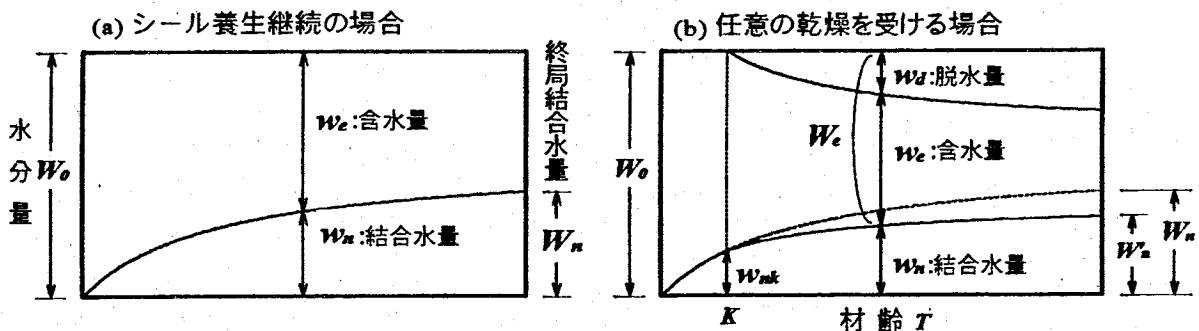


図 3.2.1 コンクリート部材内の水分の状態

$$\mu = \frac{RT}{M} \ln H + \mu_{\text{sat}}(T) \quad (3.2.4)$$

ここに, R : ガス定数
 M : 水の分子量
 T : 絶対温度
 H : 相対湿度
 μ_{sat} : 飽和時における μ

式(3.2.4)を式(3.2.3)に代入し, q を H の項で表現すれば式(3.2.2)は次式のようになる。

$$q = -C \text{ grad } H \quad (3.2.5)$$

C は透湿率であり, コンクリートの材齢や温度, 湿度に依存する係数である。式(3.2.5)を式(3.2.3)に代入すれば, 次式が得られる。

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \text{div}(C \text{ grad } H) - \frac{\partial w_n}{\partial t} \quad (3.2.6)$$

コンクリート部材内の含有水分量の分布を求めるためには, 式(3.2.6)を含有水分量の項で表す必要があるが, ここでは一定温度および水和反応の程度が一定である場合の吸着(脱着)曲線から, 湿度と水分量の関係を次式のように仮定した。

$$H = a w_e + b \quad (3.2.7)$$

係数 a, b は材齢に依存する定数である。ところで本研究のように, 若材齢からの乾燥収縮の場合, すなわち水和反応が進行する過程では湿度の変化 dH は次式のように表現できる。

$$dH = a w + dH_s \quad (3.2.8)$$

ここで, dH_s は自己乾燥による変化である。しかしながら, dH_s は非常に小さいと考えられるので, $dH_s = 0$ として, 式(3.2.6)に代入すると次式のようになる。

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \text{div}(k \text{ grad } w_e) - \frac{\partial w_n}{\partial t} \quad (3.2.9)$$

ここで、 k は材齢および含水率に依存する係数であり拡散係数と呼ばれている。式(3.2.6)が含有水分量で表した拡散方程式ということになるが、これは、いわゆる Fick の拡散法則と同一の形式となっていることが分かる。式(3.2.9)を適当な境界条件を用いて解けば w_e の分布を求めることができる。

境界条件としては、コンクリート部材内の表面での水分移動は、コンクリート表面での水分の Gibbs の自由エネルギー(μ_s)と周囲の湿度に対応するそれ(μ_{en})との差に比例するものと考えられる。

$$k \bar{n} \text{ grad } w_e = b (\mu_{en} - \mu_s) \quad (3.2.10)$$

式(3.2.10)は表面での水分の移動を規定する式であり、この式の意味するところは、乾燥開始後、長期間経過すれば部材内の全ての点における水分量の持つ Gibbs の自由エネルギーは μ_{en} と等しくなり、平衡状態に達するということである。 μ_s については表面での対応関係がある。 μ_{en} に対応する量は、乾燥開始時におけるコンクリート(材齢が固定された状態とみなすことができる)が、その周囲の乾燥条件と平衡状態に達した時の含有水分量(W_e)と考えることができる。つまりコンクリート部材内の各点では w_d, w_n の分布は異なっているが、 w_e は同一になるということである。このような関係を模式的に表したのが図3.2.2である。以上のことから次式を得る。

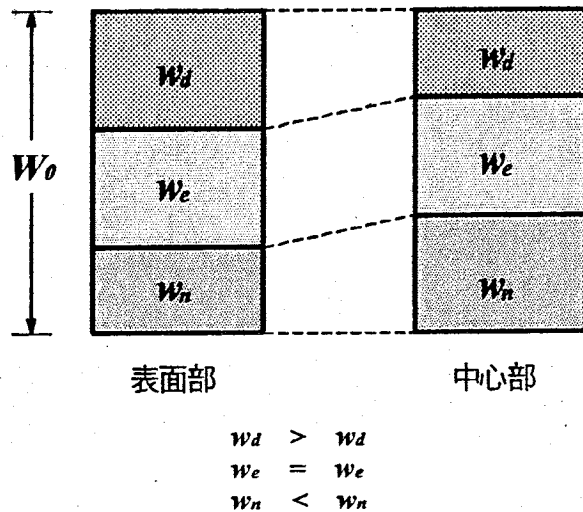


図 3.2.2 若材齢から乾燥を開始した場合の、部材が平衡状態に達した時点での含有水分量分布の模式図

$$k \bar{n} \text{ grad } w_e = f(W_e - w_e) \quad (3.2.11)$$

ここに、 f : 表面係数 (cm/day)

$$w_d = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n] \begin{Bmatrix} w_{d1} \\ w_{d2} \\ \vdots \\ w_{dn} \end{Bmatrix} = [N] \{w_d\} \quad (3.2.15)$$

ここに, $[N]$: 要素節点に関する形状関数

$\{w_d\}$: 節点の脱水量

次に結合水量 w_n は w_d に対応して決まる量であるので既知量として取り扱い, 各要素ごとに w_d と同様な近似を行う。すなわち

$$w_n = [N] \{w_n\} \quad (3.2.16)$$

ここに, $\{w_n\}$: 各節点の結合水量

重み ϕ を形状関数 $[N]$ におけばガラーキン形有限要素法となり, 式(3.2.15), 式(3.2.16)を式(3.2.14)に代入して整理すると次式のように表すことができる。

$$[C] \frac{\partial}{\partial t} \{w_d\} + [D] \{w_d\} + \{G\} = 0 \quad (3.2.17)$$

ここに, $[C]$, $[D]$, $\{G\}$ の各成分は次式のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} C_{ij} &= \sum \int_{V_e} N_i N_j dV \\ d_{ij} &= \sum \int_{V_e} \left(k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dV + \sum \int_S f N_i N_j dV \\ g_i &= \sum \int_{V_e} \sum_{r=1}^n \left\{ k \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_r}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_r}{\partial y} \right) w_{nr} \right\} dV \\ &\quad + \sum \int_S \left[\sum_{r=1}^n (f N_i N_r w_{nr}) - f (W_{en} - W_{no}) N_i \right] dS \end{aligned} \right\} \quad (3.2.18)$$

なお, dV は要素成分, dS は式(3.2.12)が関係する境界成分を表す。

式(3.2.17)が求めようとする有限要素法拡散方程式であり、未知量 $\{w_d\}$ に関する1階微分方程式を解けば各点での脱水量 w_d が求まることになるが、問題が非線形であるため、時刻 $t + \Delta t$ における $[D]_{t+\Delta t}$ は、 $\{w_d\}_{t+\Delta t}$ の値が求まらないかぎり決定できない。そこで Δt 間では、

$$\begin{aligned} [D]_{t+\Delta t} &\equiv [D]_t \\ \{G\}_{t+\Delta t} &\equiv \{G\}_t \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

と仮定して $\{w_d\}_{t+\Delta t}$ を求めることにするが、それは次のようにして行うことができる。式(3.2.17)の数値解を得る目的で、脱水量 $\{w_d\}$ の時間積分 $\{\dot{w}_d\}$ を次のような差分に置き換える。

$$\{\dot{w}_d\} = \frac{1}{\Delta t} (\{w_d\}_{t+\Delta t} - \{w_d\}_t) \quad (3.2.20)$$

$\{w_d\}$ および $\{G\}$ としては時刻 t と $t + \Delta t$ における値の線形内挿値

$$\left. \begin{aligned} \{w_d\} &= (1 - \alpha)\{w_d\}_t + \alpha\{w_d\}_{t+\Delta t} \\ \{G\} &= (1 - \alpha)\{G\}_t + \alpha\{G\}_{t+\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.21)$$

を用いることにし、式(3.2.17)に代入すれば次式のようになる。

$$\begin{aligned} ([C] + \Delta t \alpha [D])\{w_d\}_{t+\Delta t} &= ([C] - \Delta t(1 - \alpha)[D])\{w_d\}_t \\ &\quad - (\Delta t(1 - \alpha)\{G\}_t + \Delta t \alpha \{G\}_{t+\Delta t}) \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

式(3.2.22)において $\alpha = 1/2$ とおくと次式のようになる。

$$\left([C] + \frac{\Delta t}{2} [D] \right) \{w_d\}_{t+\Delta t} = \left([C] - \frac{\Delta t}{2} [D] \right) \{w_d\}_t - \frac{\Delta t}{2} (\{G\}_t + \{G\}_{t+\Delta t}) \quad (3.2.23)$$

するとCrank-Nicolson式と呼ばれる差分式が得られる。

ここで解析では式(3.2.23)を用いて順次 $\{w_d\}_{t+\Delta t}$ を求めることにするが、 $\{w_d\}_{t+\Delta t}$ を計算する際には式(3.2.19)のような近似を行っているため、 Δt 区間内で反復計算が必要ということになる。なお本解析では、解析断面は図3.2.4に示すように全断面の8分の1を三角形線形要素に分割し(25要素, 21節点), 中央差分法(最初の10日間は $\Delta t=0.1$ 日, その後50日までは0.5日, 以後1.0日)を用いて行った。

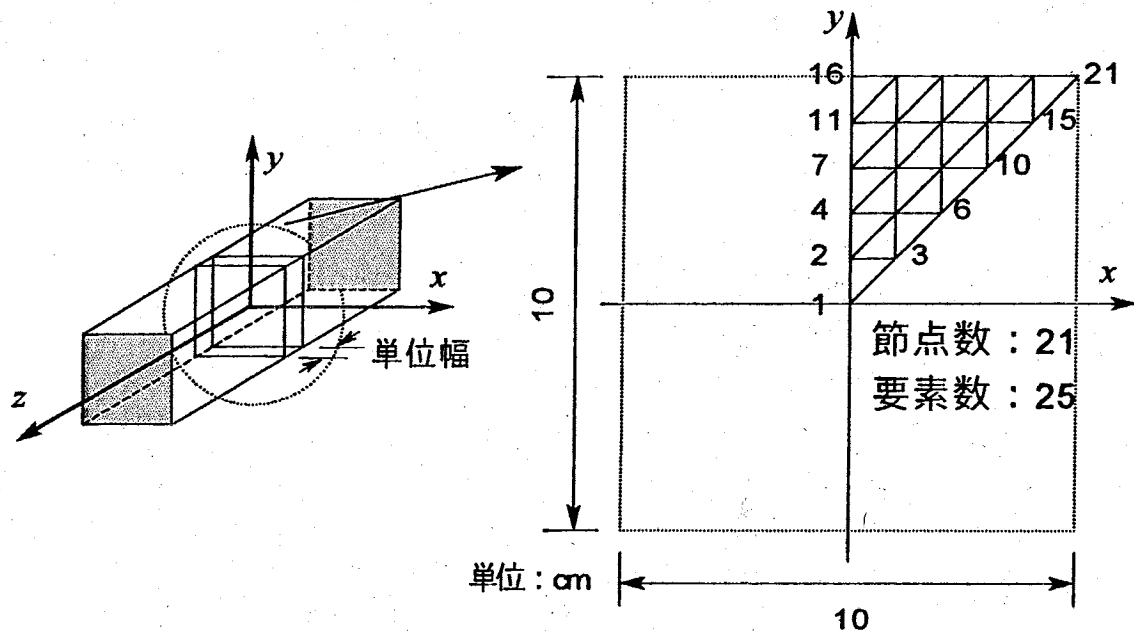


図 3.2.4 要素分割

3.3 角柱供試体における脱水量の測定

3.3.1 実験計画

実験は若材齢から乾燥を開始した場合のコンクリート供試体の乾燥収縮応力を解析するために行ったものであり、10x10x40cmの角柱供試体を用いて調合および乾燥開始材齢を種々に変化させた場合の脱水量の測定を行った。実験概要を表 3.3.1 に示す。

表 3.3.1 実験概要

調合	供試体寸法	乾燥開始材齢
A, B	10x10x40cm	3, 7, 28, 112 日および 1 年
C		1, 3, 7 および 28 日

3.3.2 コンクリートの調合および養生

使用したコンクリートは表 3.3.2 に示すように 3 種類のレディーミクストコンクリートである。10x10x40cmの角柱供試体は木製型枠を使用し、打設後 4 時間程度経ってからブリーディングがおさまるのを確認し表面を平滑にし、乾燥を防ぐため湿布で覆い、実験室内に放置した。材齢 1 日で脱型し、水を含ませたスポンジを入れた厚手のビニール袋(厚さ 0.5mm)内に完全密封し、所定の材齢になるまで養生室内(温度 $20 \pm 1^\circ\text{C}$)でシール養生とした。

表 3.3.2 コンクリートの調合表

調合	水セメント比(%)	細骨材率(%)	単位質量(kg/m ³)				
			水	セメント	細骨材	粗骨材	AE 減水剤
A	58	45.1	169	291	806	1033	0.349
B	39	38.5	183	469	614	1033	0.563
C	59.1	47.4	178	301	849	949	0.753

3.3.3 実験方法

コンクリート供試体は 10x10x40cmの角柱供試体を用い、両端面はパラフィンを用いてシールし 4 面乾燥状態としている。調合 A, B では乾燥開始材齢を 3, 7, 28, 112 日および 1 年とし、調合 C では乾燥開始材齢を 1, 3, 7 および 28 日とした。脱水量は電子天秤(容量 20kg, 感度 0.1g)を用いて測定した。乾燥後初期の間は測定を頻繁(乾燥開始後 1, 3, 6, 12, 24 時間で測定、その後乾燥期間 1 週間までは 12 時間間隔で測定)に行うようにした。乾燥は恒温恒湿室(温度 $20 \pm 0.5^\circ\text{C}$, 湿度 $60 \pm 5\%$ R.H.)内で行った。

3.3.4 実験結果および考察

図 3.3.1 に脱水量の測定結果を示す。横軸は材齢，縦軸は体積あたりの脱水量を示している。各調合とも乾燥開始材齢による脱水量の差は顕著であり，乾燥開始材齢が若いほど脱水量が大きく，乾燥直後の脱水速度も大きい。これは水和が未熟な段階にあるほど脱水速度が大きいことを示している。また，乾燥開始材齢が長期のものでも長期間乾燥しても依然として脱水する傾向を示している。また，調合 A, C に比べると水セメント比の小さい調合 B の脱水量は半分程度で，脱水量に対する水セメント比の影響が大きい。

乾燥開始後 10 日間，20 日間，60 日間までに脱水する量が乾燥期間 300 日の脱水量に対してどの程度の割合を示しているかを表したのが表 3.3.1 である。各調合とも乾燥開始材齢が若いほど乾燥後初期に脱水する量が多いことが分かる。特にその傾向は調合 A, C の場合に顕著であり，調合 A では乾燥開始材齢 3 日の場合で 10 日間に脱水する割合は 66%，乾燥開始材齢 7 日で 57%となっている。調合 C にいたっては乾燥開始材齢 1 日の場合では 10 日間に 69%も脱水する。また，乾燥期間が 20 日になるとさらに脱水は進行し，乾燥期間 60 日では，調合 A, C で乾燥開始材齢が若材齢(3, 7, 28 日)の供試体で 80%以上，長期(112, 365 日)のものでも 70%以上が脱水する。

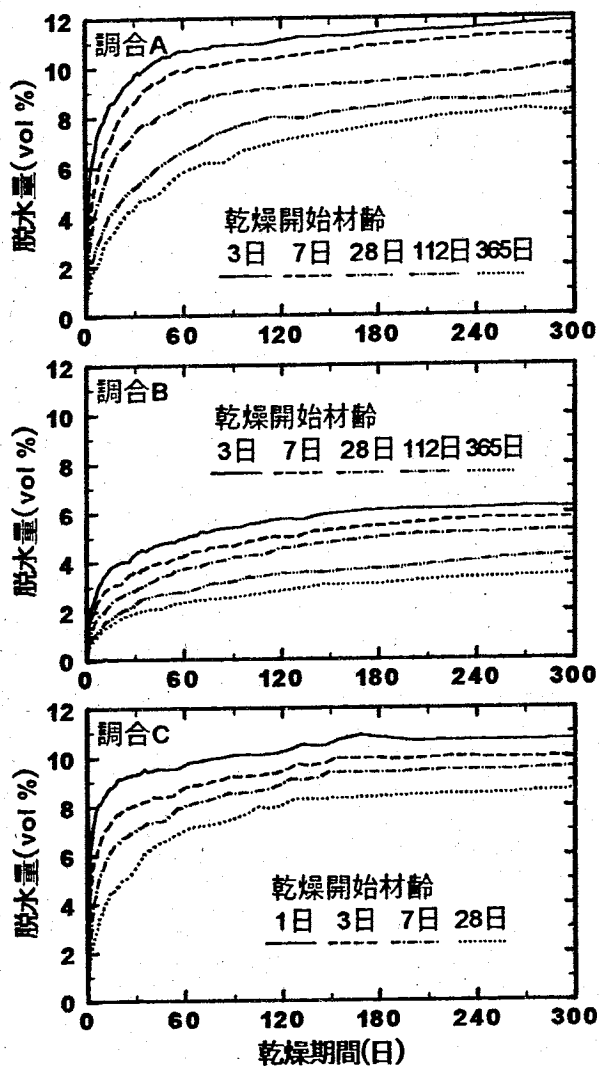


図 3.3.1 脱水量の経時変化

表 3.3.1 長期乾燥の脱水量に対する割合

調合	乾燥期間(日)	乾燥期間 300 日の脱水量に対する割合(%)				
		乾燥開始材齢(日)				
		3	7	28	112	365
A	10	66	57	51	38	32
	20	75	69	65	51	45
	60	91	88	84	75	71
B	10	54	47	37	33	32
	20	64	53	49	46	45
	60	80	74	70	65	64
C		1	3	7	28	
	10	69	59	59	45	
	20	77	70	70	57	
	60	88	84	84	83	

3.4 脱水量分布の解析

3.4.1 解析に必要な定数

(1) 水和度(m), 初期水分量(W_0)および最終結合水量(W_n)

第2章に示したように水和の進行式は式(2.3.2)で表すことができる。ここで、係数 a を式(2.3.4)から算出することになるが、この式は水セメント比によって決定する。しかしながら、レディーミクストコンクリート製造において、単位水量の管理は骨材の表面水量の測定精度と水量の調整方法に影響されるため、調合における単位水量は実際のものとは異なる場合が多い。そこで、水セメント比は、式(3.4.1)のように打設時のコンクリートの水分量を求め、逆算して水セメント比を求めた。また、最終結合水量も水セメント比によって式(2.3.3)から算出した。打設時の初期水分量、水セメント比および最終結合水量を表 3.4.1 に示す。また、この水セメント比を式(2.3.4)に代入すると水和進行式は式(3.4.2)のようになる。

表 3.4.1 初期水分量, 最終結合水量
および水セメント比

	調合 A	調合 B	調合 C
初期水分量(vol%)	24.248	19.648	21.682
水セメント比(%)	75.8	41.9	64.6
最終結合水量(vol%)	6.978	8.206	6.534

$$\text{体積含水率 (vol\%)} = \frac{(W_s - W_d)}{V} \times 100 \quad (3.4.1)$$

ここに、 W_s : コンクリートの質量 (g)

W_d : コンクリート絶乾質量(105°Cにおける質量) (g)

V : コンクリートの体積 (cm³)

$$\left. \begin{array}{l} \text{調合 A} \quad m = \frac{t}{2.670 + t} \\ \text{調合 B} \quad m = \frac{t}{1.734 + t} \\ \text{調合 C} \quad m = \frac{t}{2.645 + t} \end{array} \right\} \quad (3.4.2)$$

(2) 乾燥開始時の拡散係数(k), 表面係数(f)の決定方法

乾燥開始材齢における拡散係数 k ならびに表面係数 f は, Pickett[3.11]の数値計算を利用した岡田ら[3.14]の方法によって, 乾燥開始直後の実測データ(1日以内)を用いて求めることにした。概略を以下に示す。

コンクリートを均質, 等方質な物体と仮定する。図 3.4.1 に示すように, $2a \times 2b \times 2c$ となる立方体を考え座標の原点を中心にとる。2面乾燥の場合について求める場合, 基礎方程式は次のようになる。

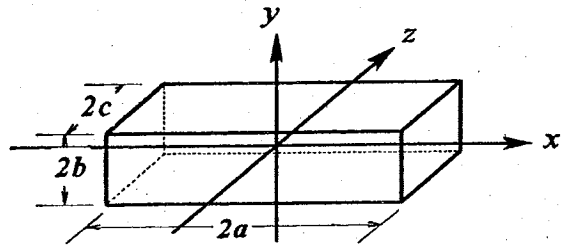


図 3.4.1 供試体

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \quad (3.4.3)$$

$$\text{初期条件 } t=0 \quad w_2 = 0$$

$$\text{境界条件 } x=0 \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0$$

$$x = \pm a \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = \pm \frac{f_x}{k_x} (W_\infty - w_2)$$

Fourier 級数による式(3.4.3)の解は次式のようになる。

$$w_2 = W_\infty \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-T_a \alpha_n^2} \frac{2 \sin \alpha_n}{\sin \alpha_n \cos \alpha_n + \alpha_n} \cos \frac{x}{a} \alpha_n \right) \quad (3.4.4)$$

$$= W_\infty (1 - \phi_a)$$

$$\text{ここに, } T_a = \frac{k_x t}{a^2}$$

$$A = \frac{f_x a}{k_x}$$

$$\alpha_n: \alpha \tan \alpha = A \text{ の } n \text{ 番目の根}$$

次に6面乾燥の脱水量を w_6 とすると, 基礎式は次のようになる。

$$\frac{\partial w_6}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial w_6}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial w_6}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial w_6}{\partial z} \right) \quad (3.4.5)$$

この場合 x, y, z に関しては各々独立であるから、 w_6 は次のように書くことができる。

$$w_6 = W_\infty (1 - \phi_a \phi_b \phi_c) \quad (3.4.6)$$

$$\text{ここに, } \phi_a = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-T_a \alpha_n^2} \frac{2 \sin \alpha_n}{\sin \alpha_n \cos \alpha_n + \alpha_n} \cos \frac{x}{a} \alpha_n$$

$T_a = k_x \cdot t / a^2$, $A = f_x \cdot a / k_x$, $\alpha_n: \alpha \tan \alpha = A$ の n 番目の根

$$\phi_b = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-T_b \beta_n^2} \frac{2 \sin \beta_n}{\sin \beta_n \cos \beta_n + \beta_n} \cos \frac{y}{b} \beta_n$$

$T_b = k_y \cdot t / b^2$, $B = f_y \cdot b / k_y$, $\beta_n: \beta \tan \beta = B$ の n 番目の根

$$\phi_c = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-T_c \gamma_n^2} \frac{2 \sin \gamma_n}{\sin \gamma_n \cos \gamma_n + \gamma_n} \cos \frac{z}{c} \gamma_n$$

$T_c = k_z \cdot t / c^2$, $C = f_z \cdot c / k_z$, $\gamma_n: \gamma \tan \gamma = C$ の n 番目の根

本研究で取り扱っている 4 面乾燥では、脱水量 w_4 は、次のように表すことができる。

$$w_4 = W_\infty (1 - \phi_a \phi_b) \quad (3.4.7)$$

次に、平均脱水量 (各要素の脱水量の平均値) をそれぞれ W_{AV2} , W_{AV6} とすると、次式のように表せる。

$$W_{AV2} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a w_2 dx = W_\infty (1 - \psi_a) \quad \left. \vphantom{W_{AV2}} \right\} \quad (3.4.8)$$

$$W_{AV6} = \frac{1}{8abc} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c w_6 dx dy dz = W_\infty (1 - \psi_a \psi_b \psi_c)$$

$$\text{ここに, } \psi_a = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-T_a \alpha_n^2} \frac{2 \sin^2 \alpha_n}{\sin \alpha_n \cos \alpha_n + \alpha_n} \frac{1}{\alpha_n}$$

$$\psi_b = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-T_b \beta_n^2} \frac{2 \sin^2 \beta_n}{\sin \beta_n \cos \beta_n + \beta_n} \frac{1}{\beta_n}$$

$$\psi_c = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-T_c \gamma_n^2} \frac{2 \sin \gamma_n}{\sin \gamma_n \cos \gamma_n + \gamma_n} \frac{1}{\gamma_n}$$

k, f を決定するにあたり、一面のみから乾燥する場合の解析解として半無限の固体表面からの乾燥を Newton の冷却則に相似させた境界条件のもとで解いた結果が Pickett[3.10]によって与えられている。

$$\frac{w_2}{w_\infty} = \operatorname{erf}\left(\frac{1-y/b}{2\sqrt{T_b}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{1-y/b}{2\sqrt{T_b}} + B\sqrt{T_b}\right) e^{B(1-y/b)+B^2 T_b} \quad (3.4.9)$$

$$\text{ここに, } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2} dx$$

式(3.4.9)を用いて k, f を求める方法を提案した岡田ら[3.14]によれば、 T_b が小さい時、すなわち十分に小さい時間 t での解析では、実測データは十分に式(3.4.9)で近似できるとしている。

図 3.4.2 に示すように一面乾燥の場合平均脱水量 W_{AV} は、次式で与えられる。

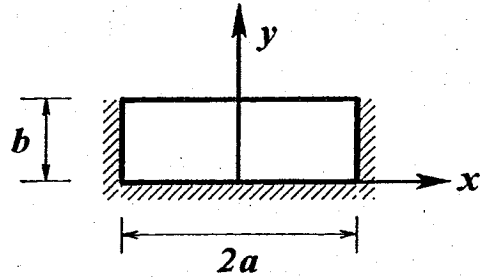


図 3.4.2 半無限の固体表面からの乾燥問題

$$W_{AV} = \frac{1}{b} \int_0^b w_2 dy \quad (3.4.10)$$

T が小さい時に式(3.4.9)を式(3.4.10)に代入すると次式のようになる。

$$\frac{W_{AV}}{W_\infty} = \frac{1}{B} \left\{ e^{B^2 T_b} \operatorname{erf}(B\sqrt{T_b}) - 1 + \frac{2B\sqrt{T_b}}{\sqrt{\pi}} \right\} \quad (3.4.11)$$

$B\sqrt{T_b}$ が非常に小さい時、式(3.4.11)を Maclaurin 展開して得られる式(3.4.12) が近似式として成立する。

$$\frac{W_{AV}}{W_\infty} = BT_b \left\{ 1 - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} B\sqrt{T_b} + \frac{1}{2} (B\sqrt{T_b})^2 - \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (B\sqrt{T_b})^3 \right\} \quad (3.4.12)$$

Pickett は T_b が約 0.05 以下で B が 5 以下ならば式(3.4.12)を用いて、かなりの精度で W_{AV}/W_∞ の値を算出できるとしている。

ここで式(3.4.12)において $B = \frac{fb}{k}$, $T_b = \frac{kt}{b^2}$, $\frac{f}{\sqrt{k}} = x$ と置き換えると次式が得られる。

$$b \frac{W_{AV}}{W_{\infty}} = \sqrt{k} x t \left\{ 1 - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{t} x + \frac{1}{2} t x^2 - \frac{8}{15\sqrt{\pi}} t \sqrt{t} x^3 \right\} \quad (3.4.13)$$

$t = t_1$ の時 $\frac{W_{AV}}{W_{\infty}} = [W_1]$, $t = t_2$ の時 $\frac{W_{AV}}{W_{\infty}} = [W_2]$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{k} x t_1 \left\{ 1 - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{t_1} x + \frac{1}{2} t_1 x^2 - \frac{8}{15\sqrt{\pi}} t_1 \sqrt{t_1} x^3 \right\} &= b [W_1] \\ \sqrt{k} x t_2 \left\{ 1 - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{t_2} x + \frac{1}{2} t_2 x^2 - \frac{8}{15\sqrt{\pi}} t_2 \sqrt{t_2} x^3 \right\} &= b [W_2] \end{aligned} \right\} \quad (3.4.14)$$

上式より \sqrt{k} を消去すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left([W_2] t_1^2 \sqrt{t_1} - [W_1] t_2^2 \sqrt{t_2} \right) x^3 + \frac{1}{2} \left([W_1] t_2^2 - [W_2] t_1^2 \right) x^2 \\ + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left([W_2] t_1 \sqrt{t_1} - [W_1] t_2 \sqrt{t_2} \right) x \\ + \left([W_2] t_1 - [W_1] t_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

式(3.4.15)は x に関する3次方程式になっている。これを解いて x を求め、式(3.4.14)に代入すれば、 f が得られる。この場合には、1面乾燥状態における実測データが必要となる。本研究では4面乾燥状態における実測データを1面乾燥状態におけるデータに変換する必要がある。1面乾燥状態の場合、式(3.4.8)によれば次式のようになる。

$$\frac{W_{AV2}}{W_{\infty}} = (1 - \psi_a) \quad (3.4.16)$$

2面乾燥の場合は次式のように書くことができる。

$$\frac{W_{AV4}}{W_{\infty}} = (1 - \psi_a \psi_b) \quad (3.4.17)$$

対象とした断面が正方形の場合にかぎり($a = b$), $\psi_a = \psi_b$ となり, 従って次式のように表される。

$$\frac{W_{AV4}}{W_{\infty}} = 1 - \psi_a^2 \quad \therefore \psi_a = \sqrt{1 - \frac{W_{AV4}}{W_{\infty}}} \quad (3.4.18)$$

すなわち2面乾燥と4面乾燥の実験データの間には次式のような関係がある。

$$\frac{W_{AV2}}{W_{\infty}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{W_{AV4}}{W_{\infty}}} \quad (3.4.19)$$

式(3.4.19)の関係を用いて4面乾燥状態の実測データを2面乾燥状態に変換し, 式(3.4.15)を解けば k, f を求めることができるが, このようにして得られる k を乾燥開始時点での拡散係数として取り扱うようにするためには, 式(3.4.15)に用いる実測データは乾燥後, 短期間のものでなくてはならない。ここでは, 乾燥開始後0.5~1.0日間のデータを用いた。このような短期間では, 部材の表面部分を除いては高含有水分量の状態にあり, 拡散係数も部材内でほぼ一定であるとみなされる。また, 水和度の変化も顕著には現れないと考えられることから, このようにして得られた拡散係数は, 水和度 m における乾燥開始時点の拡散係数 $k_0(m)$ であるとみなすことができる。図3.4.3に各調合の水和度 m と乾燥開始時点の拡散係数 $k_0(m)$ との関係を示す。拡散係数は水和の進行に伴い小さくなる。また, 図3.4.3の近似曲線より水和度 $m=1$ の時の拡散係数 $k_0(1)$ を予測すると, 調合Aは $0.3\text{cm}^2/\text{day}$, 調合Bは $0.2\text{cm}^2/\text{day}$, 調合Cは $0.4\text{cm}^2/\text{day}$ となる。この値で拡散係数 $k_0(m)$ を無次元化すると図3.4.4のようになり, 無次元化した拡散係数 $k_0(m)/k_0(1)$ は式(3.4.20)のように近似することができた。

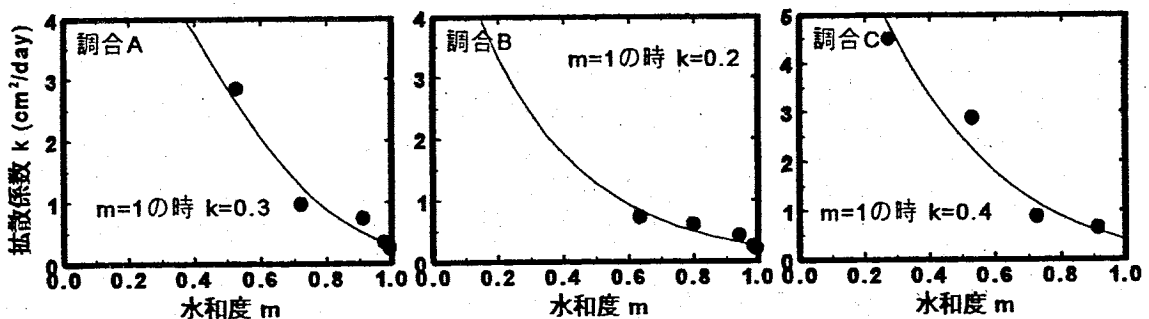


図 3.4.3 拡散係数と水和度の関係

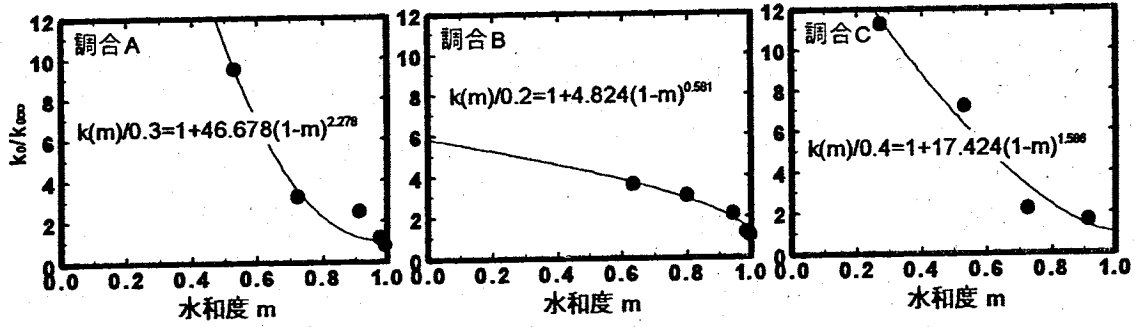


図 3.4.4 $k_0(m)/k_0(\infty)$ と水和度 m の関係

$$\begin{aligned}
 \text{調合 A} \quad & \frac{k_0(m)}{k_0(1)} = 1.0 + 46.678(1-m)^{2.278} \\
 \text{調合 B} \quad & \frac{k_0(m)}{k_0(1)} = 1.0 + 4.824(1-m)^{0.581} \\
 \text{調合 C} \quad & \frac{k_0(m)}{k_0(1)} = 1.0 + 17.424(1-m)^{1.586}
 \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

また、乾燥開始材齢における表面係数 f_0 と m の関係を示したものが図 3.4.5 である。 f_0 は次式によって近似できる。

$$\begin{aligned}
 \text{調合 A} \quad & f_0 = -2.551m + 2.942 \\
 \text{調合 B} \quad & f_0 = -1.365m + 1.812 \\
 \text{調合 C} \quad & f_0 = -1.294m + 1.877
 \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

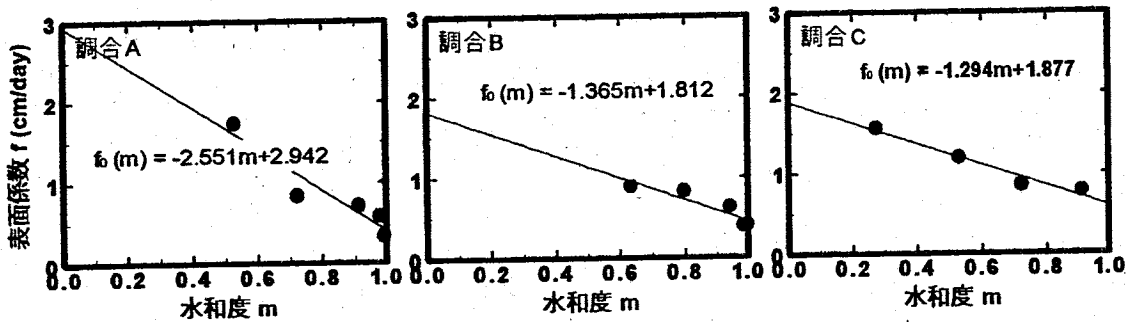


図 3.4.5 乾燥開始時における表面係数と水和度 m の関係

(3) 拡散係数の含有水分量依存性

乾燥開始時点での拡散係数は算出できたが、コンクリートの拡散係数 k は部材内各点の含有水分量およびその時の水和程度に依存することが考えられる。比較的長期材齢のコンクリート(水和の進行はほぼ停止したとみなされる)についてみると、拡散係数の含有水分量への依存性は実験的に得られており、また、湿度との関係で数式表示も試みられている。ところが、若材齢の場合については水和の進行、しかも、それは乾燥とともに水和が進行する現象が付加されるということになり、拡散係数の特性を実験的に明らかにするのは困難であろうと思われる。そこで、ここでは、若材齢の場合も含めた状態(水和の程度が一定)を考えることができれば、水和の程度 m に応じて k の含有水分量への依存性を示す曲線を得ることができ、これは次式のように表すことができる。

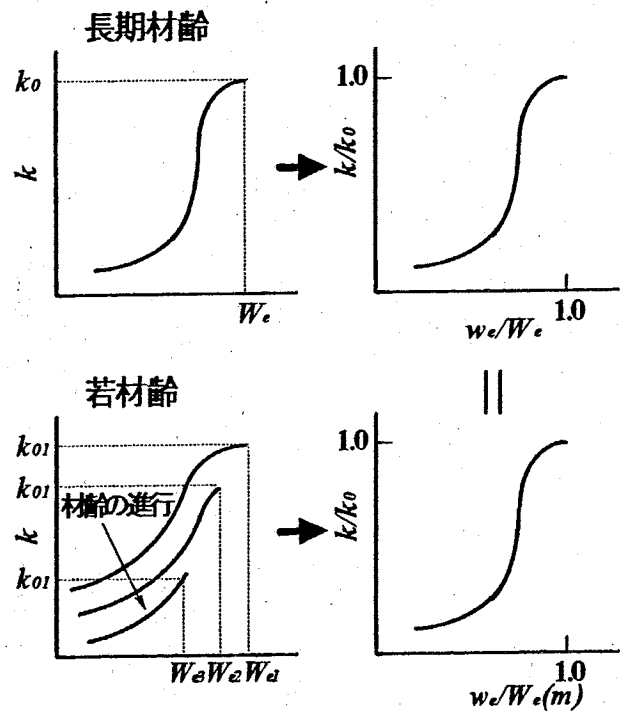


図 3.4.6 拡散係数の相対含有水分量への依存性

$$\frac{k(m)}{k_0(m)} = g_m(w_e(m)) \quad (3.4.22)$$

ここに、 $k(m)$: 任意の水和度 m の時の拡散係数

$k_0(m)$: 任意の水和度 m の時の乾燥開始時における拡散係数

g_m : 任意の水和度 m の時の含有水分量 $w_e(m)$ の関数

式(3.4.22)は、水和度 m に応じて無数の曲線群を表していることになるが、これを水和度 m における蒸発可能水分量 $w_e(m)$ で無次元化し、そのようにして得られた曲線は m によらず一定となり一本の曲線で表すことができると仮定する。そして、さらにこの曲線は長期材齢 ($m=1$) の試片について実験的に得られたデータから決定できるものとする。従って、拡散係数 k は次式のように表すことができる。

$$\frac{k(m)}{k_0(m)} = g\left(\frac{w_e(m)}{W_e(m)}\right) \quad (3.4.23)$$

式(3.4.23)の実際の乾燥問題への適用ということを考えてみると、部材内の任意の点における k は、各時点の m に応じて、式(3.4.23)で表された曲線群上を移動するということになる。 $(k$ の含有水分量への依存性の考え方は、図 3.4.6 に模式図的に示す。)

関数 g や $k_0(m)$ は具体的には次のように求めることができる。関数 g については長期材齢の試片について得られたデータを相対湿度 H との関係でプロットしてみると S 字形の曲線となっており、この曲線を Bazant & Najjar [3.12] は次式のように表示している。

$$\frac{k}{k_0} = \alpha_0 + \frac{1 - \alpha_0}{1 + \left(\frac{1-H}{1-H_e}\right)^n} \quad (3.4.24)$$

ここに、 α_0, H_0, n : コンクリートの調合に依存する実験定数

また、阪田ら [3.3] は含水率との関係で実験データを得ており、含水率 0% の時に $k/k_0 = \alpha_0$ となるように式(3.4.24)を修正し、含水率の関数として表現している。 k の含有水分量への依存性は、湿度との関係で得られた曲線とほぼ同様な傾向を示すことが考えられるので、ここでは式(3.4.24)を採用することにし、関数 g を次式のように表すことにした。

$$g(x) = \beta_0 + \frac{1 - \beta_0}{1 + \left(\frac{1-x}{1-x_0}\right)^n} \quad (3.4.25)$$

ここに、 x : 相対含有水分量 ($w_e(m)/W_e(m)$)

β_0, x_0, n : 実験定数

式(3.4.25)は m によらず同一の曲線となるが、若材齢の場合はこの曲線が異なることは十分に予測される。そこで式(3.4.25)のパラメータ β_0, x_0, n を調合ごとに各乾燥開始材齢ごとに平均脱水量の測定データを良く表すように試行錯誤によって求めてみると式(3.4.25)の曲線の形状は図 3.4.7 のように表すことができた。表 3.4.2 に得られた各パラメータの値を示しているが、 n は調合 A では 5、

表 3.4.2 β_0, x_0 および n の一覧

乾燥開始材齢(日)		3	7	28	112	365
調合 A	β_0	0.02	0.03	0.04	0.17	0.18
	x_0	0.72	0.69	0.63	0.80	0.92
	n	5	5	5	5	5
調合 B	β_0	0.001	0.002	0.01	0.02	0.02
	x_0	0.89	0.91	0.9	0.92	0.935
	n	2	2	2	2	2
乾燥開始材齢(日)		1	3	7	28	
調合 C	β_0	0.015	0.016	0.045	0.18	
	x_0	0.61	0.64	0.71	0.79	
	n	10	10	10	10	

調合 B では 2, 調合 C では 10 とし, 各調合とも乾燥開始材齢によらずに一定としている。また, パラメータ β_0, x_0 について m との関係プロットすると図 3.4.8 となる。図中には試行錯誤によって得られた値を示しており, 実線は最小 2 乗近似によって得られた結果である。パラメータ β_0 は各調合とも m との間に良い相関関係が見られる。それに対し, パラメータ x_0 は調合 C では m との間に良い相関関係が見られるが, 調合 A, B ではばらつきが大きい。

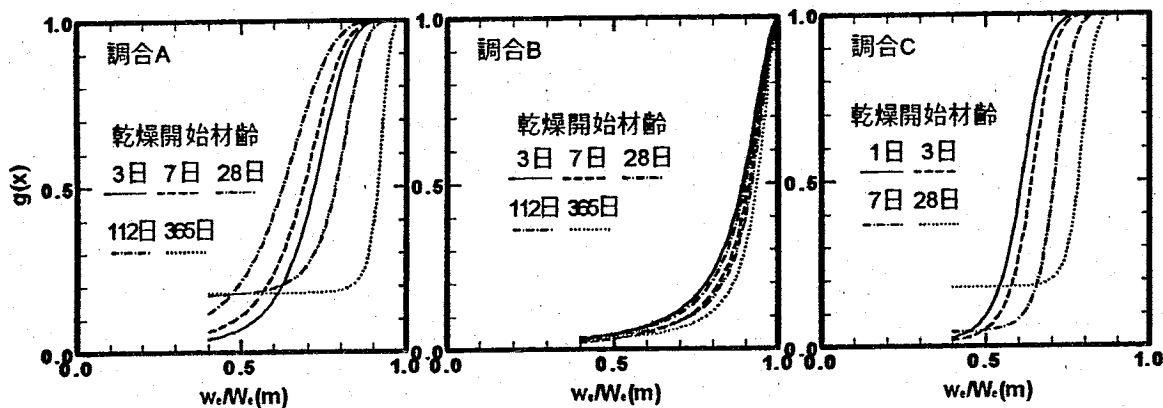


図 3.4.7 $g(x)$ と $w_e/W_e(m)$ の関係

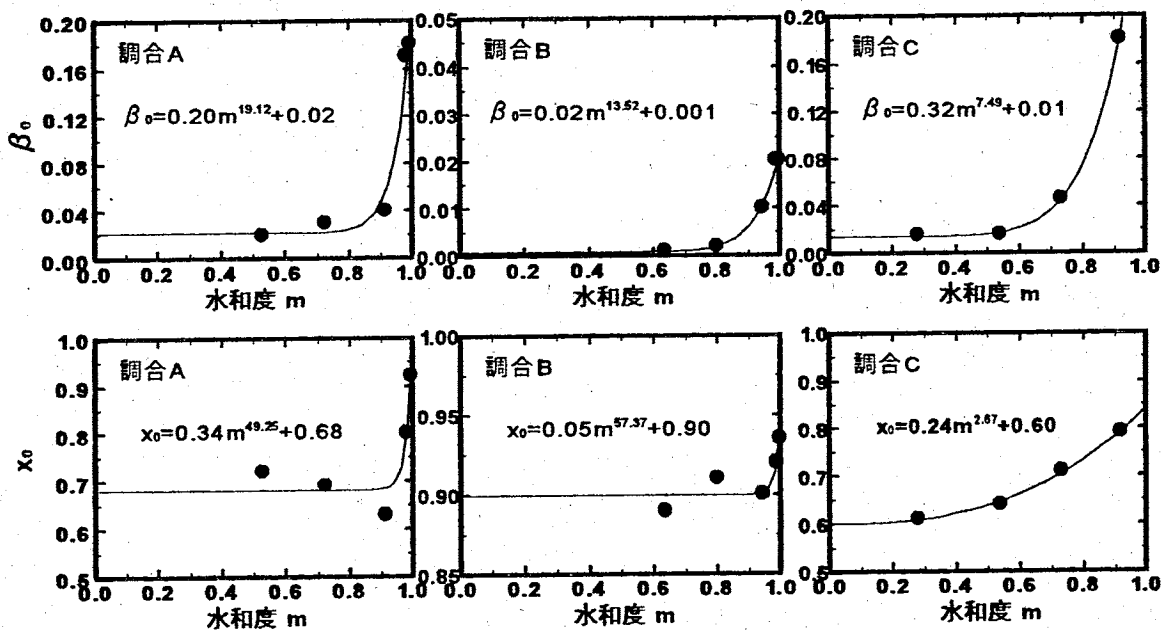


図 3.4.8 β_0, x_0 と m の関係

(4) 表面係数の含有水分量依存性

表面係数 f を直接的に測定した研究はこれまでになく、測定した平均脱水量と理論式による解が最も良く一致するような f を選んでいる例が多く、未定係数として取り扱われている[3.3] [3.11] [3.14] [3.17] [3.18]。 f は熱伝導問題における熱伝導係数と同じ意味を持っており、このことから見ると、 f は試片の形状、周囲の状況などに依存する複雑な性質を持った係数であることが分かる。ここでは、 f については以下のように取り扱うことにした。

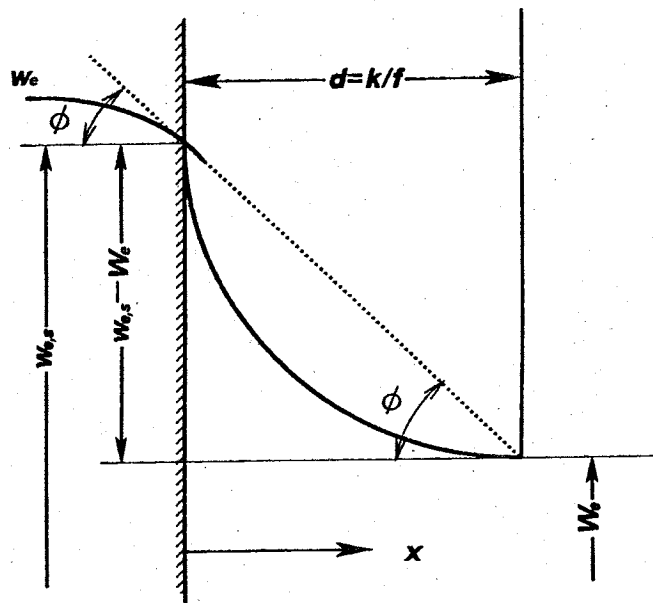


図 3.4.9 コンクリート表面での乾燥状態

コンクリートの表面での状況を詳しく見ると、図 3.4.9 のように表すことができる。表面での含有水分量 $w_{e,s}$ は w_e に急変するのではなく、表面と流体との極薄い層の間で連続的に変化することになる。この薄い層は境界層 d といわれ、次式で表すことができる。

$$d = \frac{k}{f} \tag{3.4.26}$$

この境界層 d は乾燥とともに減少する傾向を示すことが考えられるが、それを規定するだけのデータは得られていない。そこで、ここでは、(2)項で得られた乾燥開始時における拡散係数 k_0 と同時に求められた乾燥開始時における表面係数 f_0 を用い、乾燥後は表面係数を変化させ境界層 d が一定となるようにして解析を行った。乾燥開始時点の境界層を d_0 とすれば、 $d = d_0(m)$ と表すことができ、境界層が一定になるように、 k の変化に応じて f も変化することになる。 d_0 と m の関係は図 3.4.10 に示すように水和の進行とともに減少する。 d_0 は近似した式(3.4.27)で表すことにした。

調合 A	$d_0(m) = -2.193 m + 2.781$	}	(3.4.27)
調合 B	$d_0(m) = -0.499 m + 1.135$		
調合 C	$d_0(m) = -3.453 m + 3.938$		

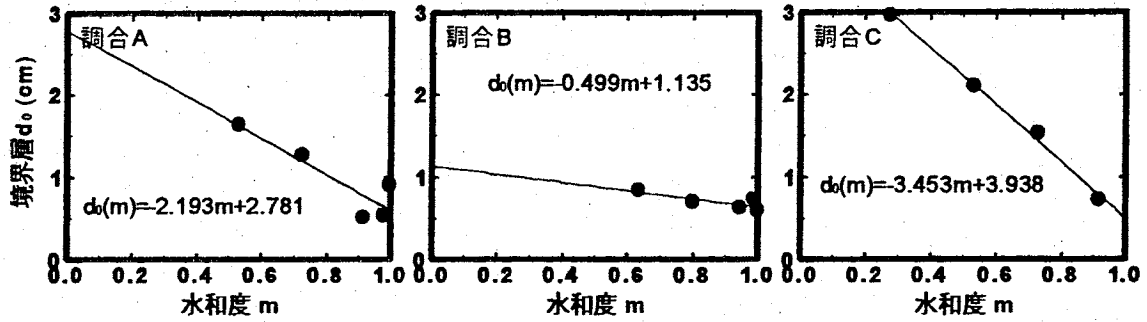


図 3.4.10 乾燥開始時における境界層(d_0)と m の関係

(5) 一定湿度下での蒸発可能水(W_{en})

解析にはある乾燥条件下のもとで脱水可能とみなすことができる水分量である W_{en} が必要である。これは材齢を固定とした場合の脱水量(瞬間的に空気中の湿度と平衡させた時に脱水すると考えられる量)であるので、実験で求めることは困難である。そこで、ある乾燥条件下において、通常の脱水量と急速脱水量(コンクリートを細かく砕いて短期間で平衡状態に達するようにしたもの)を測定した結果[3.13]から求めるようにした。細かく砕いているとはいえ、材齢が若い場合には、若干、外気との間に水和が進行すると思われるが、これは無視することにした。図 3.4.11 は水セメント比が 55%と 75%の 2 種類のコンクリートにおける終局脱水量と急速脱水量を示したものである。横軸は乾燥開始材齢の水和度を表示したもので、水セメント比から水和進行速度式を算出した。当然のことながら、急速脱水量のほうが大きくなる。実線は通常脱水量を近似したものである。この曲線に対する急速脱水量の比率を m との関係で示したのが図 3.4.12 である。これによると水セメント比の違いによらず式(3.4.28)で表すことができる。よって W_{en} の算出は、通常乾燥の最終値を脱水量の測定値から推測し、式(3.4.28)に代入して行った。

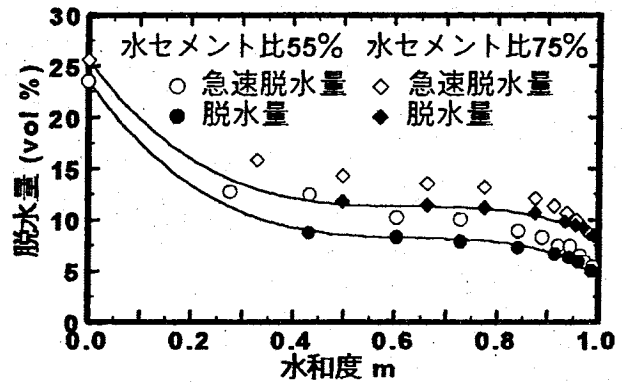


図 3.4.11 終局脱水量と急速脱水量の比較

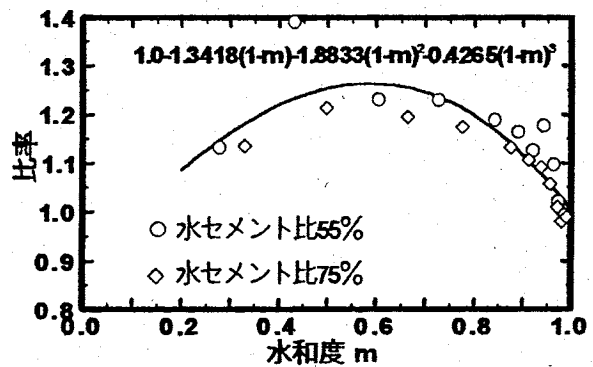


図 3.4.12 終局脱水量に対する急速脱水量の比率

$$\frac{W_{en}}{W_{e\infty}} = 1.0 - 1.3418(1-m) - 1.8833(1-m)^2 - 0.4265(1-m)^3 \quad (3.4.28)$$

次に W_{en} と水和度 m との関係を求める。それにはまず $m=1$ の時の W_{en} が必要である。水和の十分に進行している場合の W_{en} は、長期材齢供試体の最終の脱水量と同じであると考えられる。図 3.4.13 の縦軸は図 3.3.1 に示した脱水量の測定結果から水和が十分に進行した時点での脱水量の終局値を推測しプロットした。横軸は乾燥開始材齢の水和度を示している。実線は近似曲線で、これより $m=1$ の時の終局脱水量 (W_{EN}) を予測すると調合 A は 8.7 vol%，調合 B は 4.1 vol%，調合 C は 6.5 vol% となる。この値で W_{en} を無次元化すると図 3.4.14 となり、次式によって表すことができる。

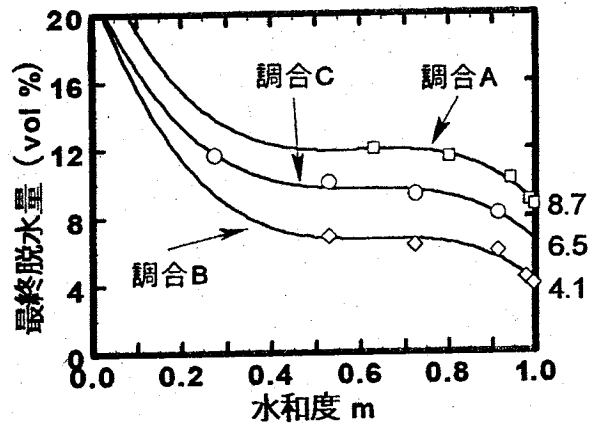


図 3.4.13 終局脱水量

$$\left. \begin{aligned} \text{調合 A} \quad \frac{W_{en}}{W_{EN}} &= 1.0 + 4.134(1-m) - 8.477(1-m)^2 + 6.121(1-m)^3 \\ \text{調合 B} \quad \frac{W_{en}}{W_{EN}} &= 1.0 + 9.036(1-m) - 23.454(1-m)^2 + 20.418(1-m)^3 \\ \text{調合 C} \quad \frac{W_{en}}{W_{EN}} &= 1.0 + 5.440(1-m) - 11.321(1-m)^2 + 8.075(1-m)^3 \end{aligned} \right\} (3.4.29)$$

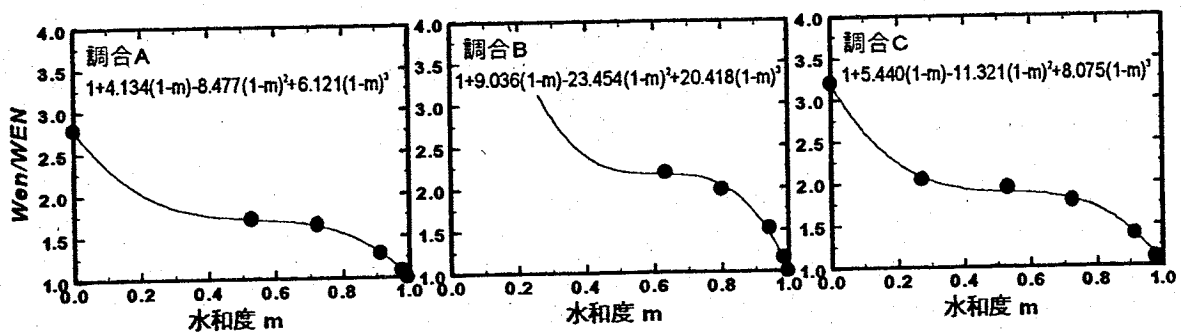


図 3.4.14 乾燥開始材齢時における水和度と終局脱水量の関係

3. 4. 2 解析結果および考察

(1) 平均脱水量

図 3.4.15~図 3.4.17 に平均脱水量の解析結果を示す。解析は 100 日まで行い、結果は計算した全 25 要素の平均値を示している。調合 A, B, C ともに解析結果は実験データを良く近似できているが、調合 B の場合、乾燥開始後初期において若干実験データよりも大きくなる傾向となった。解析用いた定数は前述したとおりである。これらの定数のうち、拡散係数の含有水分量への依存性については、実験定数 β_0, x_0, n を含んでいる。 β_0, x_0 は m によらず同一の曲線とはならないため実験データと一致するような数値を試行錯誤的に選んでいるが、図 3.4.8 に示すように乾燥開始時における水和度との相関関係が認められる。また、各乾燥開始材齢における W_{en} は急速乾燥と通常乾燥の実験結果をもとに推定したもので、この値を乾燥開始時の水和度との関数で示したのが式(3.4.29)である。この式が計算による脱水量の最終値に大きく影響を及ぼすことになる。乾燥期間 100 日までの結果ではあるが、計算による最終値と実測値が良く一致しており、 W_{en} には適切な値が与えられたものと考えられる。

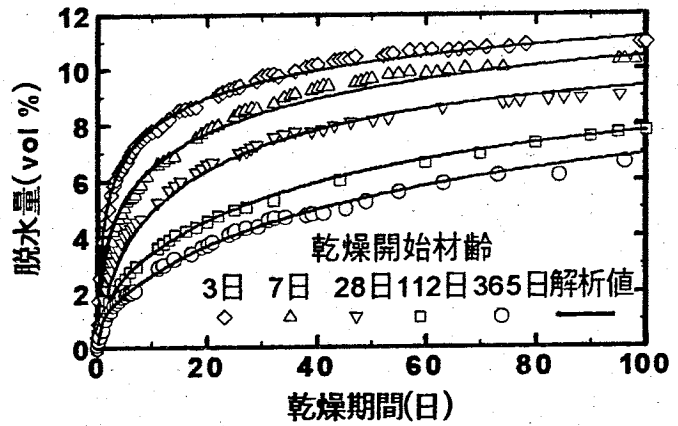


図 3.4.15 平均脱水量の解析結果 (調合 A)

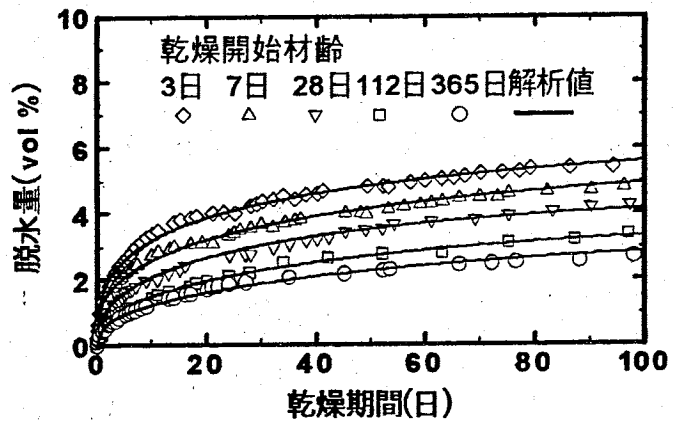


図 3.4.16 平均脱水量の解析結果 (調合 B)

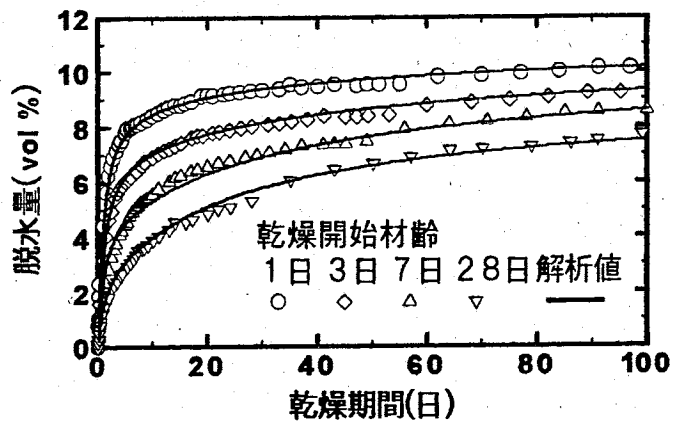


図 3.4.17 平均脱水量の解析結果 (調合 C)

(2) 水分量分布

部材内の脱水量の分布を正確に計算することは困難であり、また、測定する方法も確立しておらず、正確に測定することは容易ではない。従って、この結果が実際の状況を示しているかの確認はできないが、平均脱水量の解析結果が測定値と一致しているため、脱水量分布も計算できているものと判断した。

図 3.4.18 に調合 A、図 3.4.19 に調合 B、図 3.4.20 に調合 C の解析によって得られた若材齢からの脱水量分布を示す。横軸は要素の脱水量、縦軸はコンクリート供試体の中心からの位置を示している。0cm が中心で 5cm は表面部分である。また、図 3.4.21 に調合 A、図 3.4.22 に調合 B、図 3.4.23 に調合 C の脱水量分布を等値線図で示す。これは全断面の 1/4 について、等値線の間隔を 1vol% で示したものである。これらを見ると、表面部分の脱水量が急激に大きくなるため、中心からの距離が 4cm～5cm の間での勾配が大きい。また、表面部分の含有水分量は乾燥後、早い期間で平衡状態になるため、乾燥期間が長期になってもそれ以上は脱水量が大きくなる。一方、内部の脱水量は、徐々に大きくなっていくため、表面付近の勾配は徐々に小さくなる。中心からの距離が 0cm～4cm の間についてみると、調合 A、C では、乾燥開始材齢が若い場合（乾燥開始材齢 7 日まで）、乾燥期間 1 日でもかなりの勾配が生じているが、調合 B ではこの間の脱水量の差はほとんどなく、乾燥開始後初期の間は、乾燥開始材齢が長期になるにつれ脱水量は小さくなる。すべての材齢で乾燥期間が経過するにつれて勾配が小さくなり、徐々に平衡状態に近くなる。

3.5 第3章のまとめ

第3章では、乾燥収縮応力解析を行うために必要となるコンクリート部材内の含有水分量の分布を、非線形拡散方程式により解析した。要約すると以下ようになる。

1. すべての調合で、脱水量は乾燥開始材齢が若いほど大きく、また、乾燥初期の脱水速度も大きくなる。調合 A、C に比べると水セメント比の小さい調合 B は脱水量が小さい。
2. 若材齢から長期材齢より乾燥を受けたコンクリートの平均脱水量は、非線形拡散方程式による有限要素法解析で十分に実験データを近似できる。
3. 拡散方程式を解くための材料定数に関しては、決定方法に問題はあるが、すべて水和度との関数で表せる。
4. 脱水量の分布は表面部分が極端に大きく、乾燥後すぐに平衡状態に近くなる。また、内部の脱水量は、ゆっくりと変化し、すべての材齢で乾燥期間が経過するにつれて脱水量の勾配が小さくなり、徐々に平衡状態に近くなる。

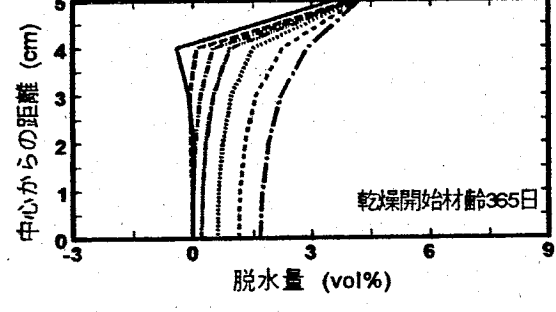
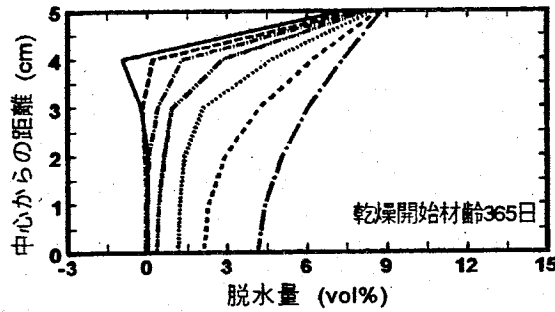
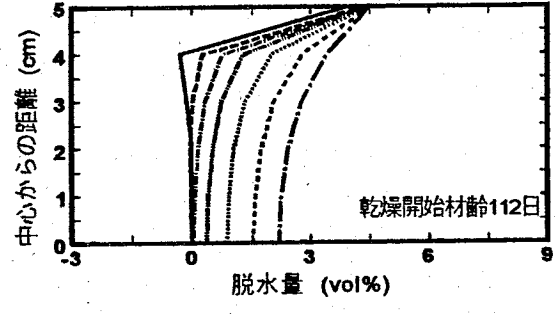
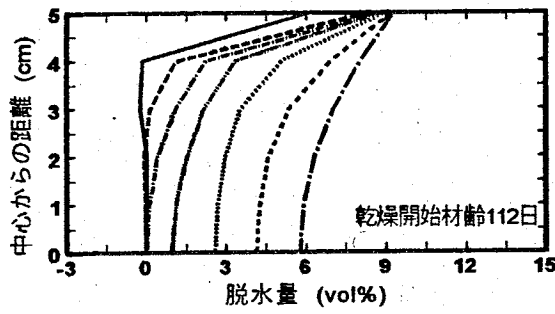
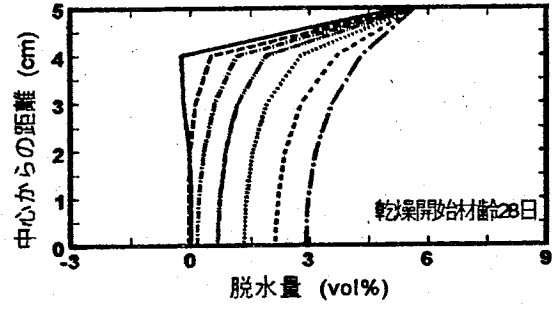
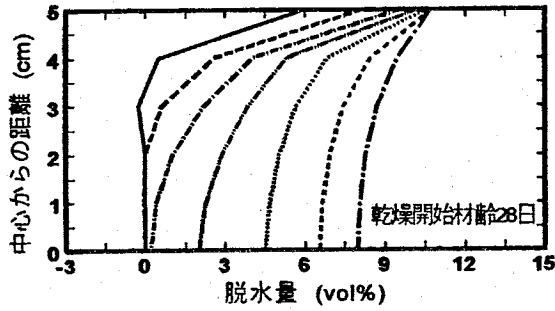
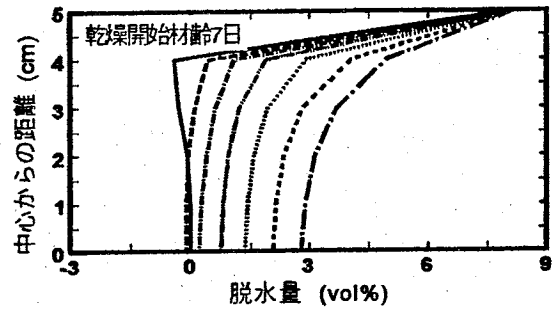
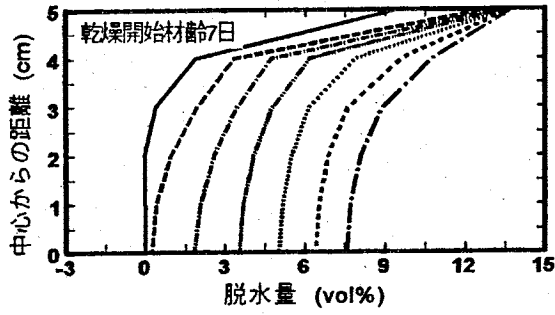
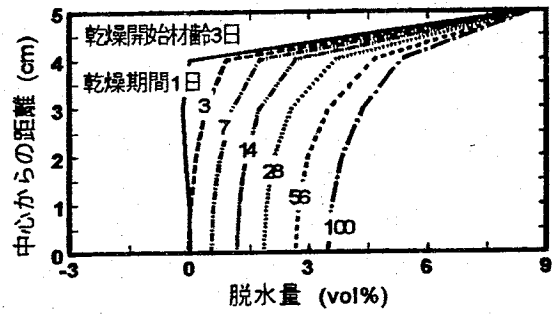
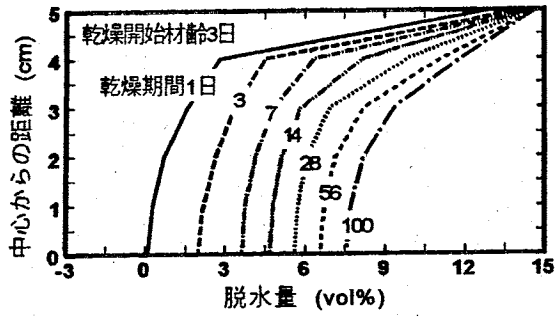


図 3.4.18 脱水量分布の解析結果 (調合 A)

図 3.4.19 脱水量分布の解析結果 (調合 B)

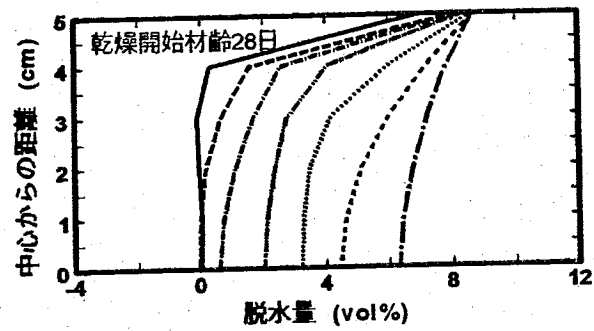
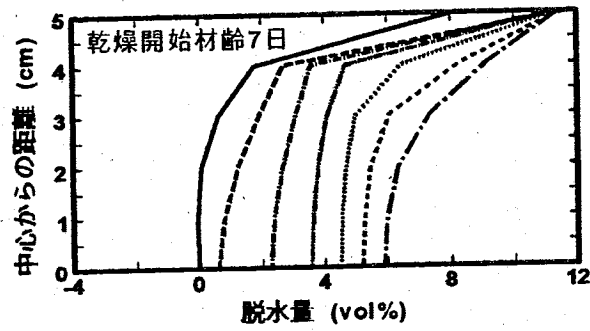
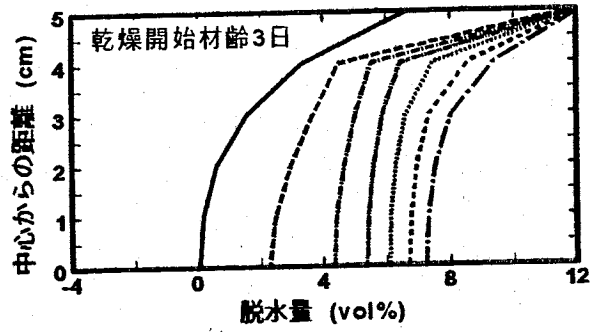
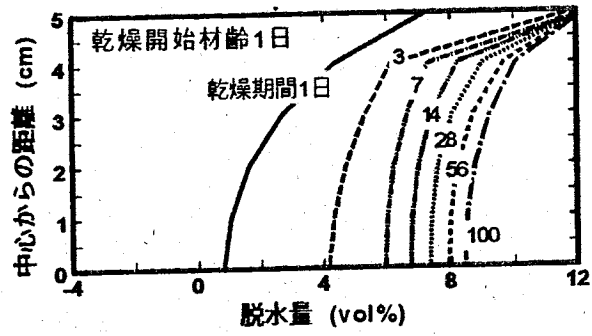
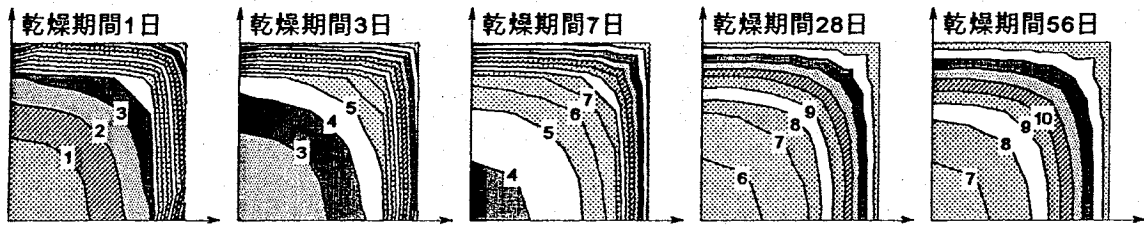
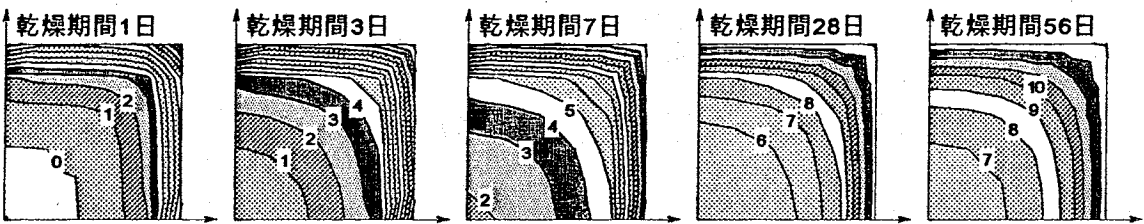


図 3.4.20 脱水量分布の解析結果 (調合 C)

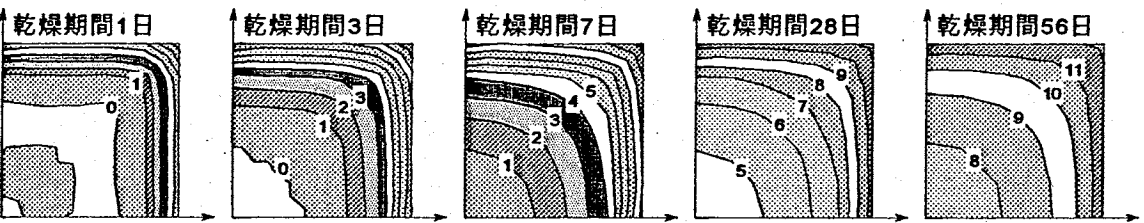
乾燥開始材齢3日



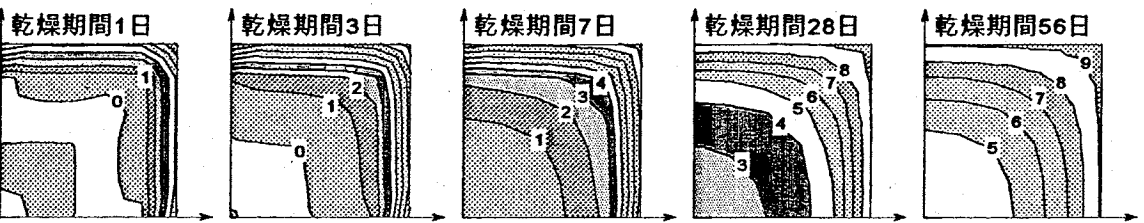
乾燥開始材齢7日



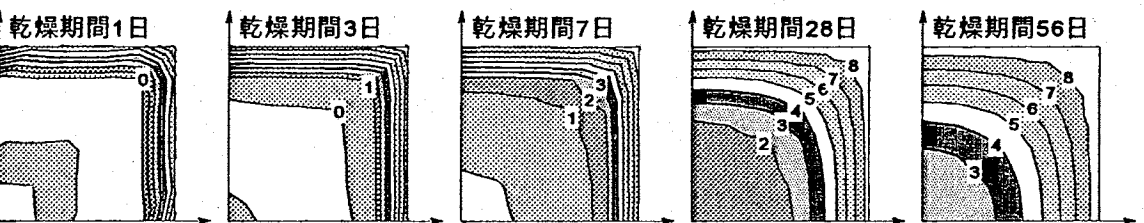
乾燥開始材齢28日



乾燥開始材齢112日



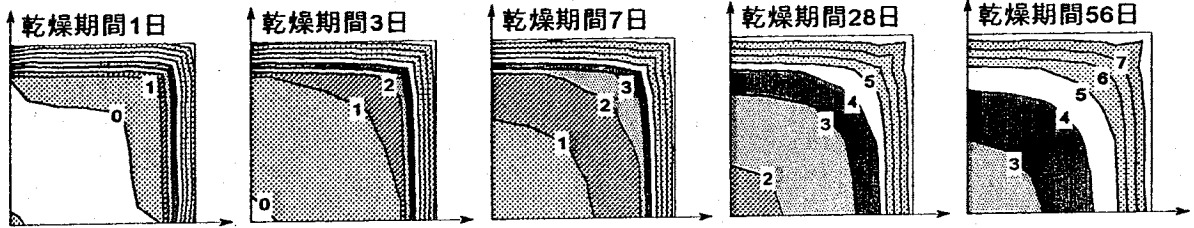
乾燥開始材齢365日



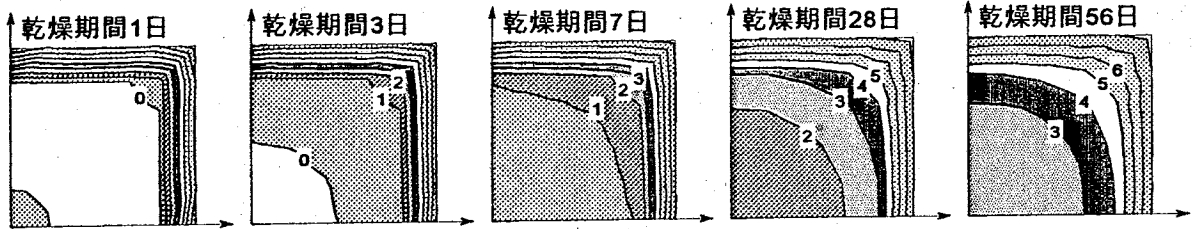
単位: vol %

図 3.4.21 脱水量分布の解析結果 (調合 A)

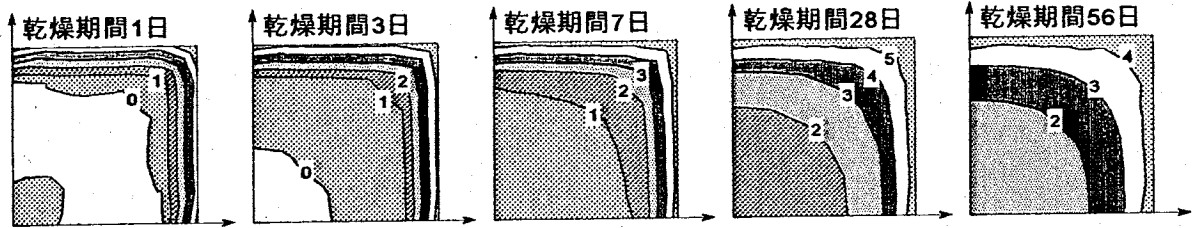
乾燥開始材齢3日



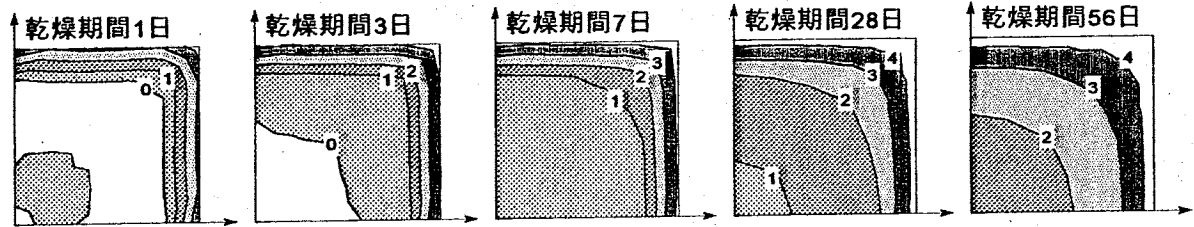
乾燥開始材齢7日



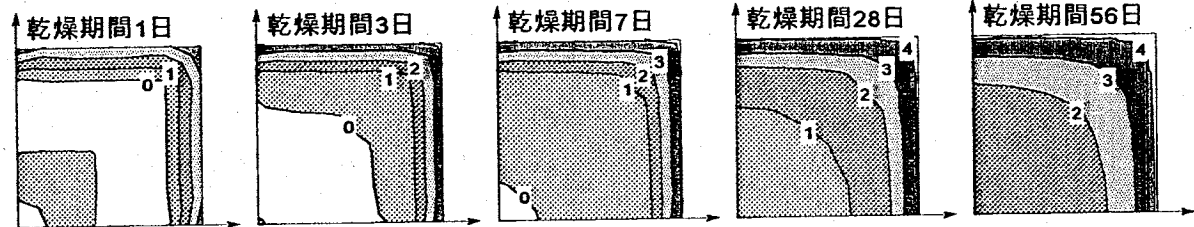
乾燥開始材齢28日



乾燥開始材齢112日



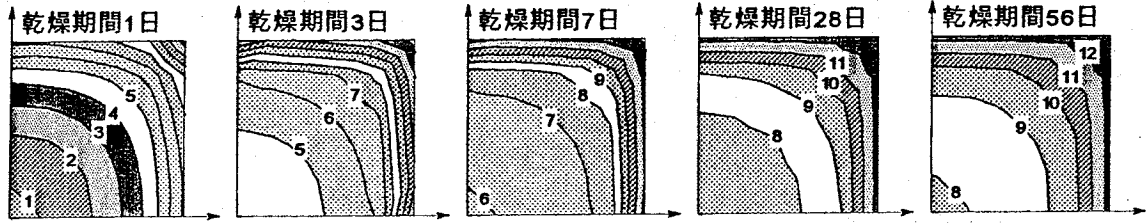
乾燥開始材齢365日



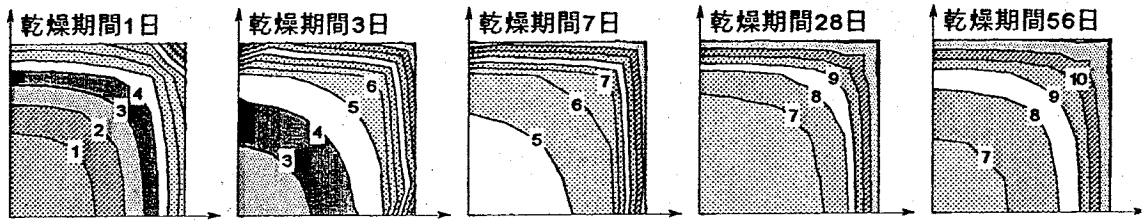
単位: vol %

図 3.4.22 脱水量分布の解析結果 (調合 B)

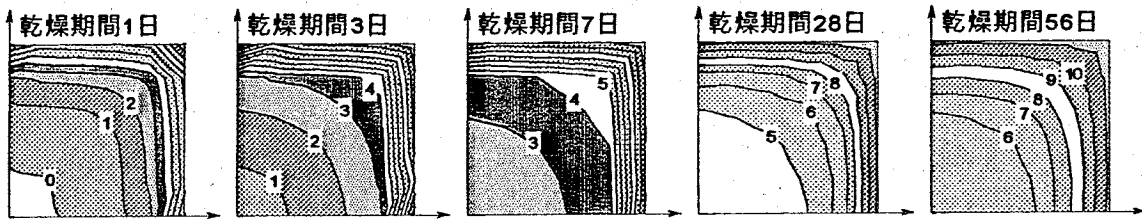
乾燥開始材齢1日



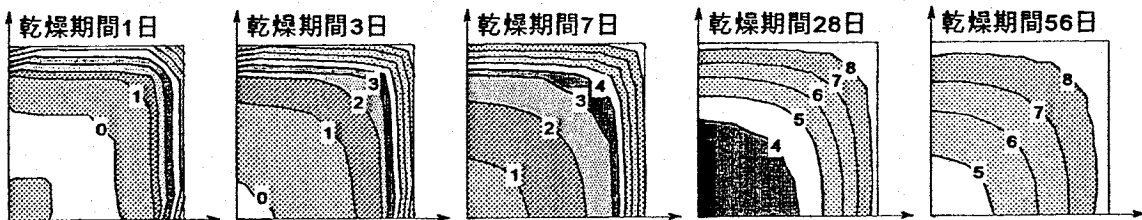
乾燥開始材齢3日



乾燥開始材齢7日



乾燥開始材齢28日



単位: vol %

図 3.4.23 脱水量分布の解析結果 (調合 C)

【第3章の参考文献】

- [3.1] 後藤幸正・藤原忠司・飯泉 章:乾燥過程におけるコンクリート内部の含水状態について, セメント技術年報 29, pp. 175-178, 1975
- [3.2] Pihlajavaara, S. E. : History – dependence, aging, and irreversibility of properties of concrete, International Conference on Structures, Solid Mechanics and Engineering Design, Southampton, pp. 719-741, 1969
- [3.3] 阪田憲次・蔵本 修:乾燥に伴うコンクリート中の水分の逸散と乾燥収縮に関する研究, 土木学会論文報告集, No. 316, pp.145-152, 1981. 12
- [3.4] 下村 匠・前川宏一:微視的機構に基づくコンクリートの乾燥収縮モデル, 土木学会論文集, No. 520, pp. 35-45, 1995. 8
- [3.5] 笠井芳夫:モルタルおよびコンクリートの乾燥に関する研究(第1報～第3報), 日本建築学会関東支部報告, pp. 9-20, 1962
- [3.6] 鎌田英治・田端雅幸・中野陽一郎:コンクリート内部の含水量の測定, セメント技術年報 30, pp. 288-292, 1976
- [3.7] 大岸佐吉・小野博宣・文 堅:セメント硬化体の電気抵抗と電気容量に及ぼす測定条件の影響, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 12, No. 1 pp. 389-394, 1991
- [3.8] 笠井芳夫・松井 勇・湯浅 昇・小井戸純司:埋込みセラミック素子によるコンクリートの含水率測定方法に関する基礎的研究, コンクリート工学年次論文報告集, Vol. 13, No. 1 pp. 397-402, 1991
- [3.9] 湯浅 昇・笠井芳夫・松井 勇:埋込みセラミックセンサの電気特性によるコンクリートの含水率測定方法の提案, 日本建築学会構造系論文集, No. 498, 13-20, 1997. 8
- [3.10] 山田和夫・小林 健・山本俊彦:4面乾燥状態にあるコンクリートの水分移動性状に関する基礎的研究, セメント・コンクリート論文集, No. 50, pp. 466-471, 1996. 12
- [3.11] Pickett, G. : Shrinkage stresses in concrete, Journal of the American Concrete Institute, Vol. 17, No. 3, pp. 165-204, 1946
- [3.12] 吉田弥七:乾燥によるコンクリートの亀裂に関する主要性質の実験的研究(其の1), 土木学会論文集, 第2号, 1944. 6
- [3.13] O. C. ツィエンキーヴィッツ著/吉識雅夫・山田嘉昭 監訳:マトリックス有限要素法, 培風館, pp. 80-81
- [3.14] 岡田 清・川村満紀:ソイルセメントの乾燥収縮応力に関する二,三の考察,土木学会論文報告集, No. 142, pp. 37-43, 1967. 6

- [3.15] 佐藤嘉昭:コンクリートの硬化乾燥による収縮応力ならびにひび割れ予測に関する研究, 九州大学学位論文, 1984
- [3.16] Bazant, Z. P. and Najjar, L. J. : Nonlinear water diffusion in nonsaturated concrete, *Materials and Structures(RILEM)*, Vol.15, No.25, pp.3-20, 1972
- [3.17] 中西正俊:コンクリートおよびモルタルの乾燥収縮過程を拡散方程式で表示した時の諸係数について, 日本建築学会論文報告集, No. 190, pp.11-17, 1971. 12
- [3.18] 秋田 寛・藤原忠司・小坂芳夫:モルタルの乾燥・吸湿・吸水過程における水分移動, 土木学会論文報告集, No. 420, pp.61-69, 1990. 8