

第5章 結論

第5.1節 本研究の総括

第2章から第4章まで、肉厚金属板裏側微小欠陥の確実な検出を可能にするための基礎的研究の結果について述べてきた。本研究で得られた結果や知見は、電磁界を用いた非破壊評価技術の適用範囲を広げ、社会的に重要な使命を持つ非破壊評価技術の発展に寄与できる。以下、その内容を要約する。

[I] 本研究で開発した回転磁束型磁気センサは、励磁磁界に回転磁界を使用したことによって欠陥検出特性や欠陥検出機構に従来とは異なるいくつかの特徴を持つことができた。回転磁束型磁気センサの全体としての特徴は次の通りである。

1) 回転磁束型磁気センサは、励磁系に4個の磁極を持つため試料に平行な励磁磁界の成分を持ち、しかも、回転する磁界で欠陥を検出するため励磁磁束が試料内に深く浸透し、肉厚金属板裏側微小欠陥を探傷の対象とすることができた。

2) 新しく開発した3軸サーチコイルは、欠陥の存在による磁氣的性質の変化や渦電流の変化を複合して3次元のベクトル値として捕らえることを可能とした

3) 回転磁束型磁気センサは、欠陥検出素子を別に設け、励磁系と測定系を分けることによって両者の設計に自由度が増し、多くの種類の励磁素子や欠陥検出素子を組み合わせることが可能となった。

4) 欠陥検出素子から得られる多くの信号は、いくつかの有効な欠陥判定用パラメータの定義を可能とした。

5) 微小裏側欠陥を検出するためには、高いSN比を必要とするが、回転磁束型磁気センサは、高いSN比を実現できた。

6) 回転磁束型磁気センサは、1点の測定で欠陥に関する多くの情報が得られることから、欠陥属性推定問題に関しても有効であった。

[II] 回転磁束型磁気センサは、偏位式、差動式ともそれぞれ特徴を持ち、用途によって使い分けること必要であることがわかった。偏位式回転磁束型磁気センサは、構造が簡単で欠陥検出方式も単純なため製作も検査も容易である。しかし、差動式に比べ欠陥検出信号の変化率が小さい。また、差動式回転磁束型磁気センサは、構造が偏位式に比べ比較的複雑であるため、製作や検査に多少の注意が必要である。しかし、欠陥検出信号の変化率が大きいという利点を持っている。これらの特徴を考慮して、それぞれ回転磁束型磁気センサの適用範囲を以下に示す。また、Table 5-1に検査対象と回転磁束型磁気センサの対応表を示す。

1) 5 mm厚程度までの磁性体被検査材を対象とした広範囲で大まかな探傷には、偏位式では、励磁周波数を5 Hzから10 HzにしてもSN比の低下が少なく、小型軽量であるためセンサの移動に大がかりな装置を必要としない3軸サーチコイル回転磁束型磁気センサを10 Hz程度で励磁して用いることが適している。一方、差動式では、40 Hz程度の励磁周波数が使える3軸差動ピックアップコイル回転磁束型磁気センサを単体もしくはアレイ化するなどして用いる方法が適している。

2) 5 mm厚程度までの磁性体被検査材を対象にした精密な探傷には、2.5 Hz程度の

周波数で励磁した3軸サーチコイルU字鉄心励磁式回転磁束型磁気センサ、あるいは、5 Hz程度の周波数で励磁した3軸差動サーチコイル回転磁束型磁気センサが被検査材への自己密着性のためノイズが少なく裏側微小欠陥が検出できるため、多少形状的に大きくなるが適している。

3) 5 mm厚程度までの非(弱)磁性体被検査材を対象にした探傷には、探傷範囲や探傷精度に関わらず、数 kHzから数十 kHz程度の高い励磁周波数で励磁した3軸差動ピックアップコイル回転磁束型磁気センサが探傷の高速性などの点から適している。

Table 5-1 Correspondence table between the rotational magnetic flux sensor and subject of inspection

検査対象	例	センサ名
磁性板(裏)広域	5 mm厚程度の軟鋼板など	◎空心蝶型磁気センサ・○U字鉄心型磁気センサ
磁性板(裏)精密	〃	◎差動サーチコイル型磁気センサ・○U字鉄心型磁気センサ・○差動ピックアップコイル型磁気センサ
非磁性板(裏)広域	5 mm厚程度のステンレス板・インコネル板・アルミ板など	◎差動ピックアップコイル型磁気センサ・○鉄心蝶型磁気センサ
非磁性板(裏)精密	〃	◎差動ピックアップコイル型磁気センサ

第5. 2節 今後の展望と研究課題

本研究により、回転磁束型磁気センサを用いることによって、電磁界を利用した非破壊評価技術を肉厚金属板裏側欠陥にまで適用することが可能となったが、回転磁束型磁気センサは、依然多くの研究課題を残している。この回転磁束型磁気センサに関しての今後の研究課題は、大きく分けて3つあると考えられる。そこで、以下に今後の研究課題について述べる。

1) 微小自然欠陥の属性を正確に推定し、部品や部材の交換時期を知ることのできる機能^[93]を回転磁束型磁気センサに持たせることが期待される。

2) 回転磁束型磁気センサに残留磁界の分布を計る機能^[94-96]やバルクハウゼンノイズ^[97-98]を検出する機能を付加し、疲労の蓄積状態を定量的に知ることができるようになることも必要であろう。

3) 回転磁束型磁気センサとコンピュータなどの電子機器を統合し、欠陥検出技術のみでなく疲労推定技術を含めて自動化された非破壊評価システムを構築することも望まれる。

以上のような研究をさらに進めて、回転磁束型磁気センサを含めた電磁現象を利用した非破壊評価技術に関する知見を拡充していくことが望まれる。

謝 辞

本論文は、著者が大分大学大学院工学研究科博士後期課程物質生産工学専攻機能物質工学講座に在籍中、電気工学教室榎園研究室において行った電磁現象を利用した非破壊評価技術に関する研究の結果をまとめたもので、研究の機会を与えてくださったばかりでなく、本研究の遂行にあたって終始ご親切なご指導とご鞭撻をいただいた大分大学工学部電気電子工学科榎園正人教授に心から感謝の意を表し、厚くお礼申し上げます。

本論文をまとめるにあたって数々の有益なご教示を頂いた九州工業大学工学部電気工学科山崎二郎教授、大分大学工学部電気電子工学科田中充教授、同小林正教授、同秋田昌憲助教授、同戸高孝助教授の各先生方に心からの感謝の意を表し、厚くお礼申し上げます。また、懇切なるご助言を頂いた Szczecin 工科大学 (Poland) の R. Sikora 教授に深く感謝の意を表します。

さらに、学生の頃より終始暖かい目で見守って頂き、暖かい励ましの言葉を賜り、本研究を進める段階では数々のご助言とご協力を頂いた大分工業高等専門学校制御情報工学科金田嗣教教授に心より感謝の意を表します。

また、本研究を進めるにあたり数々のご配慮や助言を頂いた大分工業高等専門学校神田幸則校長、大分大学工学部電気電子工学科 T. Chady 講師、同槌田雄二助手、宮崎大学工学部長田尚一郎助手、さらに、数々のご協力を頂いた大分工業高等専門学校の先生方、並びに祖田直也君をはじめとする大分大学大学院生並びに学部生各位、大分工業高等専門学校制御情報工学科卒研生各位に心より感謝いたします。

なお、本研究を進める過程において数々のご協力をいただいた日立金属(株)磁性材料研究所西山俊一、同香川理人、前川製作所藤間克己の各氏に深く感謝の意を表します。

(1999年3月)

参考文献

- [1] 日本 AEM 学会研究委員会原子炉及び原子炉内構造物の経年劣化の非破壊計測と評価に関する調査研究分科会編, 「原子炉及び原子炉内構造物の経年劣化の非破壊計測と評価に関する調査研究分科会報告書」, 1998
- [2] 日本 AEM 学会研究委員会劣化診断開発技術分科会編, 「構造用材料の劣化診断技術の開発委託研究報告書」, 1993
- [3] 日本 AEM 学会研究委員会劣化診断開発技術分科会編, 「構造用材料の劣化診断技術の開発委託研究報告書」, 1994
- [4] 加藤, 「非破壊検査のおはなし」, 日本規格協会, 1997
- [5] 岸, 志波, 「ミクロの傷を追う」, 丸善株式会社, 1989
- [6] 「JIS ハンドブック 非破壊検査」, 日本規格協会, 1998
- [7] 日本 AEM 学会研究委員会 ECT 高度化研究開発分科会編, 「渦電流探傷試験の理論評価手法の開発研究調査報告書」, 1993
- [8] 日本 AEM 学会研究委員会 ECT 検査技術の高度化研究開発分科会編, 「ECT 検査技術の高度化研究調査報告書」, 1997
- [9] M. Enokizono, T. Todaka, M. Oka and S. Nagata, "Non-Destructive Testing under Two-Dimensional Exciting Magnetic Field", *Nondestructive Testing of Materials*, IOS Press, pp. 303-312, 1995
- [10] 榎園, 長田, 「回転磁束型磁気センサーによる磁気探傷」, 日本応用磁気学会誌, Vol. 15, No. 2, pp. 455-460, 1996
- [11] M. Oka and M. Enokizono, "Searching Defect Under Rotating Magnetic Field", *Nonlinear Electromagnetic Systems*, IOS Press, Vol. 10, pp. 756-759, 1996
- [12] 山部, 「金属・材料の磁性と検査・物性」, 金属, Vol. 68, No. 7, pp. 23-30, 1998
- [13] 成田, 阿部, 「近代電子計測工学」, 電気書院, 1972
- [14] 西野, 「改訂電気計測」, コロナ社, 1973
- [15] 安孫子, 「わかる電子計測技術」, CQ出版社, 1994
- [16] M. Oka and M. Enokizono, "A Detection of Backside Crack Using Rotational Magnetic Flux Sensor with Search Coils", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32, No. 5, pp. 4968-4970, 1996
- [17] 岡, 榎園, 「回転磁束型磁気センサによる鋼板裏側欠陥の磁気探傷」, 電気学会研究会資料 MAG-96-116, pp. 115-124, 1996
- [18] 岡, 榎園, 「回転磁束型磁気センサによる鋼板裏側欠陥の推定」, 日本応用磁気学会誌, Vol. 21, No. 4-2, pp. 633-636, 1997
- [19] M. Oka and M. Enokizono, "Rotational Magnetic Flux Sensor with Three Axis Search Coil for Non-Destructive Testing", *Nonlinear Electromagnetic Systems*, IOS Press, Vol. 13, pp. 357-360, 1998
- [20] 岡, 榎園, 「回転磁束型磁気センサによる欠陥形状推定の検討」, 電気学会研究会資料 MAG-96-252, pp. 31-39, 1996
- [21] M. Oka and M. Enokizono, "Non-Destructive Testing on Stainless Steel Plate by Rotational Magnetic Flux Sensor", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 33, No. 5, pp. 3373-3375, 1997
- [22] 岡, 槌田, 榎園, 「3 軸差動サーチコイル回転磁束型磁気センサによる磁気探

- 傷」, 日本応用磁気学会誌, Vol. 23, No. 4-2, pp. -, 1999, (投稿中・採択済み)
- [23] M. Enokizono, M. Oka, T. Todaka, M. Akita, T. Chady, Y. Tsuchida, R. Sikora, M. Gratkowski and J. Sikora, "Nondestructive Testing by Differential Type of Rotational Magnetic Sensor", *Nonlinear Electromagnetic Systems*, IOS Press, Vol. 13, pp. 361-364, 1998
- [24] M. Oka, M. Enokizono, T. Todaka, M. Akita, T. Chady, Y. Tsuchida, R. Sikora, S. Gratkowski and J. Sikora, "Defect Detective Characteristics of The Differential Type of Rotational Magnetic Sensor", *Electromagnetic Nondestructive Evaluation(II)*, IOS Press, pp. 188-195, 1998
- [25] M. Oka, M. Enokizono, T. Todaka, M. Akita, T. Chady, Y. Tsuchida, R. Sikora and S. Gratkowski, "High Sensitive Rotational Magnetic Flux Sensing", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, (投稿中・採択済み)
- [26] M. Oka and M. Enokizono, "Electromagnetic Non-destructive Testing for Metallic Plate by The Rotational Magnetic Flux Sensor", *Proceedings of The 1st Japanese-Bulgarian-Macedonian Joint Seminar*, (投稿中)
- [27] 岡, 榎園, 「3軸差動サーチコイルを備えた回転磁束型磁気センサとニューラルネットワークによる磁気探傷」, 第7回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 121-124, 1998
- [28] M. Oka, M. Enokizono, T. Todaka, M. Akita, T. Chady, Y. Tsuchida, R. Sikora and S. Gratkowski, "Discrimination of Reverse Side Defect Properties Using the Differential Type of the Rotational Magnetic Flux Sensor with the Neural Network", *Proceedings of The International Conference on Electrical Engineering Vol. I*, pp. 890-893, 1998
- [29] M. Oka and M. Enokizono, "Automatic Estimation of a Reverse-side Defect by The Rotational Magnetic Flux Sensor with The Neural Network", *The Japanese and Korean Joint Research Report*, pp. 41-42, 1998
- [30] 橋本, 「渦電流探傷試験法の理論 (原理、測定法、信号処理、数値解析)」, 第6回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 84, 1997
- [31] T. Takagi, M. Uesaka, and K. Miya, "Electromagnetic NDE Research Activities in JSAEM", *Electromagnetic Nondestructive Evaluation*, IOS Press, pp. 9-16, 1997
- [32] 上坂, 助川, 宮, A. Gilanyi, 森下, 千葉, 「原子炉鉄鋼材料の劣化診断のラウンドロビン試験」, 第7回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 33-36, 1998
- [33] 白田, 上坂, 宮, 青木, 高橋, 「マイクロECTによる円管の渦電流試験」, 第4回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 189-192, 1995
- [34] M. Uesaka and K. Miya, "Micro-ECT by Flexible Microloop Magnetic Sensor Array", *Nonlinear Electromagnetic Systems*, IOS Press, Vol. 10, pp. 708-711, 1996
- [35] 加藤, 山田, 岩原, 「プレーナ型渦電流探傷プローブの欠陥検出特性」, 日本応用磁気学会誌, Vol. 20, No. 2, pp. 577-580, 1996
- [36] 海老根, 竹内, 荒, 「乱れ磁束検出型平行四辺形プローブによる渦電流探傷」, 日本応用磁気学会誌, Vol. 20, No. 2, pp. 633-636, 1996
- [37] N. Ebine, S. Takeuchi and K. Ara, "Development of an ECT Probe Having Exciting coils in the Shape of Parallelograms", *Electromagnetic Nondestructive Evaluation*, IOS Press, pp. 223-230, 1997

- [38] 前畑, 磯部, 西川, 「非磁性細管を対象としたリモートフィールド渦電流探傷法の考察」, 日本AEM学会誌, Vol. 3, No. 2, pp. 11-18, 1995
- [39] M. Isobe, R. Iwata and M. Nishikawa, "High Sensitive Remote Field Eddy Current Testing by using Dual Exciting Coils", *Nondestructive Testing of Materials*, IOS Press, pp. 145-152, 1995
- [40] 福富, 高木, 黄, 谷, 西川, 「非磁性材料に適用するリモートフィールド ECT の3次元渦電流解析」, 第7回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 99-102, 1998
- [41] Y. Sun, "A Introduction To Electromagnetic Nondestructive Testing", *Nonlinear Electromagnetic Systems*, IOS Press, Vol. 13, pp. 145-152, 1998
- [42] S. Nagata and M. Enokizono, "Magnetic Sensor Using Progressive Magnetic Flux", *Advanced Computational and Design Techniques in Applied Electromagnetic Systems*, Elsevier Science, pp.141-144, 1995
- [43] 榎園, 槌田, 片井, 「移動磁界型磁気探傷装置」, 日本応用磁気学会誌, Vol. 21, No. 4-2, pp. 773-776, 1997
- [44] Y. Tsuchida, T. Okamoto and M. Enokizono, "A moving magnetic flux type sensor with shading coils for eddy current testing", *JOURNAL DE PHYSIQUE*, Vol. 8, pp. 789-792, 1998
- [45] 槌田, 榎園, 「くま取りコイルを用いた移動磁界型渦電流探傷センサー」, 日本応用磁気学会誌, Vol. 22, No. 4-2, pp. 897-900, 1998
- [46] T. Chady and M. Enokizono, "IDENTIFICATION OF CRACKS USING EDDY CURRENT IMAGING TECHNIQUE", *Proceedings of The International Conference on Electrical Engineering Vol. I*, pp. 844-847, 1998
- [47] J. Pavo, A. Gasparics, I. Sebestyen, G. Vertesy, C. S. Daroczi and K. Miya, "Eddy Current Testing with Fluxset Probe", *Electromagnetic Nondestructive Evaluation*, IOS Press, pp. 215-222, 1997
- [48] V. Coccoresse, F. C. Morabito, T. Formisano and R. Martone, "Performance Improvement in Eddy Current Testing via Phase Information", *Electromagnetic Nondestructive Evaluation*, IOS Press, pp. 66-73, 1997
- [49] Z. Chen, K. Miya and M. Kurokawa, "Reconstruction of Crack Shapes Using a Newly Developed ECT Probe", *Electromagnetic Nondestructive Evaluation(II)*, IOS Press, pp. 225-232, 1998
- [50] S. Pagano, E. Sarnelli, C. Camerlingo, A. Monaco, M. Russo, G. Peluso, G. Pepe, A. Ruosi, M. Valentino, R. Teti, P. Buonadonna, L. Malitato, M. Salvato and M. Prencipe "HTc SQUID for Non-Destructive Evaluation", *Electromagnetic Nondestructive Evaluation*, IOS Press, pp. 206-214, 1997
- [51] F. Kojima, "A Computational Method for Estimating Corrosion Shape Arising in Eddy Current Testing", *Nondestructive Testing of Materials*, IOS Press, pp. 153-162, 1995
- [52] T. Chady, M. Komorowski, R. Sikora, "Eddy current nondestructive testing of modeled cracks in plane conducting plates", *ELECTROMAGNETIC PHENOMENA APPLIED TO TECHNOLOGY*, JSAEM Studies in Applied Electromagnetics 4, pp. 18-27, 1996
- [53] R. Sikora, M. Komorowski and T. Chady, "A Neural Network Model of Eddy Current Probe", *Electromagnetic Nondestructive Evaluation*, IOS Press, pp.

231-238, 1998

- [54] P. Burrascano, E. Cardelli, T. Chady, M. Enokizono, M. Komorowski and R. Sikora, "Physical Modeling Applied to Eddy Current Non Destructive Testing", *Electromagnetic Nondestructive Evaluation(II)*, IOS Press, pp. 24-30, 1998
- [55] 笹田, 吉田, 「マイクロ磁気異方性検出素子の試作とその非破壊検査への応用」, 電気学会研究会資料 MAG-96-219, pp. 27-36, 1996
- [56] 星川, 小山, 徳村, 「回転渦電流による渦流探傷プローブについて」, 日本 AEM 学会誌, Vol. 3, No. 3, pp. 36-42, 1995
- [57] 星川, 小山, 「回転渦電流を利用した渦流探傷プローブ」, 日本 AEM 学会誌, Vol. 3, No. 3, pp. 36-42, 1995
- [58] 荒, 「非破壊検査で迫る傷と劣化」, 日本応用磁気学会第 9 4 回研究会資料, pp. 1-8, 1996
- [59] 山田, 「渦電流探傷の挑戦—画像化」, 日本応用磁気学会第 9 4 回研究会資料, pp. 17-22, 1996
- [60] M. Enokizono and S. Nagata, "Simulation Analysis of Magnetic Sensor for Nondestructive Testing by Boundary Element Method", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, No. 2, pp. 877-880, 1990
- [61] 後藤, 橋本, 「交流漏洩磁束探傷試験の等価正弦波非線形数値解析の評価」, 第 6 回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 29-34, 1997
- [62] 後藤, 橋本, 「交流漏洩磁束法の磁気特性評価」, 第 7 回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 115-120, 1998
- [63] H. Tsuboi, K. Ikebe, F. Kobayashi and T. Misaki, "Numerical Analysis of Eddy Current Testing Probe", *Electromagnetic Nondestructive Evaluation*, IOS Press, pp. 67-72, 1997
- [64] M. Hayakawa, V. Cingoski, K. Kaneda and H. Tamasita, "Evaluation of the Characteristics of a Rotating Eddy-Current Probe for ECT using Edge FEM", *Electromagnetic Nondestructive Evaluation(II)*, IOS Press, pp. 170-179, 1997
- [65] バディッチュ, 松本, 青木, 中安, 「3次元有限要素法モデルを用いた電磁場解析手法による ECT 信号のシミュレーション」, 日本 AEM 学会誌, Vol. 4, No. 1, pp. 50-54, 1996
- [66] M. Enokizono, T. Todaka and M. Akita, "Rotational Magnetic Flux Sensor with Neural Network for Non-destructive Testing", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 29, No. 6, pp. 3195-3197, 1993
- [67] M. Enokizono, T. Todaka and T. Maeda, "Inverse analysis with neural networks", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier Science, pp. 571-573, 1994
- [68] M. Enokizono and Y. Akinari, "Defect identification in magnetic materials by using genetic algorithm", *Advanced Computational and Design Techniques in Applied Electromagnetic Systems*, Elsevier Science, pp. 117-120, 1995
- [69] M. Enokizono and T. Kai, "Defect Identification on the Opposite Side of The Conducting Material by Means of Genetic Algorithm", *Nonlinear Electromagnetic Systems*, IOS Press, Vol. 13, pp. 201-204, 1998
- [70] M. Enokizono, T. Todaka and K. Shibao, "Inverse Analysis by Boundary Element

- Method with Laplace Transform”, Nonlinear Electromagnetic Systems, IOS Press, Vol. 10, pp. 206-209, 1996
- [71] 榎園, 戸高, 植田, 「ファジィ推論による逆問題磁界解析」, 第1回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 257-260, 1992
- [72] 小島, 久保田, 谷口, 泉澤, 「ファジィ推論機構による ECT 検査技術のインテリジェント化に関する一手法」, 第7回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 111-114, 1998
- [73] W. Cheng, K. Miya, Z. Chen and Y. Yoshida “Reconstruction of a 3-D Crack form ECT Signals by Approach of Database”, 第7回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 103-106, 1998
- [74] 福富, 高木, 谷, 小島, 「辺要素有限要素法に基づくパラメータ推定法を用いた ECT におけるき裂の同定」, 第6回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 35-36, 1998
- [75] F. Kojima, “Computational Method for Crack Shape Reconstruction using Hybrid FEM-BEM Scheme based on A- ϕ Method”, Electromagnetic Nondestructive Evaluation, IOS Press, pp. 279-286, 1997
- [76] 小島, 岡本, 大野, 「パラメータ推定法を用いた蒸気細管材料の亀裂形状同定について」, 第6回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 40-41, 1998
- [77] 土井, 早野, 斉藤, 「ウェーブレット変換を用いた磁界系逆問題解析法の提案」, 電学論A, Vol. 117-A, No. 2, pp. 122-127, 1997
- [78] R. Sikora, J. Sikora and A. Kaminska, “Application of Hybrid Finite Element Method to Eddy Current Tomography”, Electromagnetic Nondestructive Evaluation(II), IOS Press, pp. 129-136, 1997
- [79] 中田, 高橋, 「電気工学の有限要素法」, 森北出版, 1994
- [80] Z. Chen, 吉田, 宮, 黒川, 「渦電流探傷におけるきず傾きの影響」, 第6回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 25-28, 1997
- [81] M. Oka and M. Enokizono, “Evaluation of Four Types of Rotational Magnetic Flux Sensor Using Signal-to-Noise Ratio”, Electromagnetic Nondestructive Evaluation(II), IOS Press, pp. 196-205, 1998
- [82] M. Oka and M. Enokizono, “Comparison with the Various Types of Rotational Magnetic Flux Sensor with Search Coils Using Signal-to-Noise Ratio”, Journal of Technical Physics, Vol. 39, No.3-4, pp. 593-606, 1998
- [83] 佐藤, 横川, 「電気通信 I」, 朝倉書店, 1973
- [84] 長谷川, 「ステンレス鋼便覧」, 日刊工業新聞社, 1995
- [85] 新美, 「センシング工学」, コロナ社, 1995
- [86] 貴家, 「デジタル信号処理」, 昭晃堂, 1997
- [87] 押山, 相川, 辻井, 「電子回路」, コロナ社, 1977
- [88] 山田, 「電気磁気学」, 電気学会, 1973
- [89] 久保, 「逆問題」, 培風館, 1992
- [90] 日本機械学会, 「逆問題のコンピュータアナリシス」, コロナ社, 1991
- [91] 矢川, 「ニューラルネットワーク」, 培風館, 1992
- [92] 安居院, 長橋, 高橋, 「ニューラルプログラム」, 昭晃堂, 1993
- [93] 小島, 長島, 葛西, 鈴木, 「SQUID データを用いた電磁場逆解析による非破壊評価の一手法」, 第6回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 38-39, 1998

- [94] 高橋, 「転移と磁化曲線」, 第7回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 37-40, 1998
- [95] 葛西, 中山, 茅根, 「原子炉鉄鋼材料の劣化診断—SQUID による磁気変化検出—」, 第7回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 52-55, 1998
- [96] 豊岡, Suprapedi, 河野, 張, 「レーザスペックル干渉法による A533B 引っ張り試験片塑性変形過程の連続観察」, 第7回 MAGDA コンファレンス講演論文集, pp. 41-44, 1998
- [97] M. Enokizono, A. Nishimizu and M. Oka; “Estimation of Fatigue Level on Rotational Barkhausen Noise”, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 160, pp. 43-44, 1996
- [98] 白江, 「磁性体の雑音」, 日本 AEM 学会誌, Vol. 2, No. 2, pp. 7-13, 1994
- [99] 加川, 「開領域問題のための有限/境界要素法」, サイエンス社, 1983

付録 A-φ 法による渦電流を考慮した2次元磁界解析

1. 支配方程式の導出

マックスウエルの電磁方程式は、

$$\text{rot } H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{①}$$

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{②}$$

$$\text{div } B = 0 \quad \text{③}$$

$$\text{div } D = \rho \quad \text{④}$$

$$B = \mu_0 H + M \quad \text{⑤}$$

$$D = \epsilon_0 E + P \quad \text{⑥}$$

$$J = \sigma E \quad \text{⑦}$$

ここで、 H は磁界の強さ(A/m)、 J は電流密度(A/m²)、 D は電束密度(C/m²)、 E は電界の強さ(V/m)、 B は磁束密度(T)、 M は磁化の強さ、 P は分極、 ρ は真電荷密度(C/m³)、 μ_0 は真空の透磁率($4\pi \times 10^{-7}$ H/m)、 ϵ_0 は真空の誘電率(8.854×10^{-12} F/m)、 σ は導電率(S/m)である。また、①～④式を支配方程式、⑤～⑦式を構成方程式と呼ぶ。

マックスウエルの電磁方程式は、変位電流が無視でき、励磁界が低周波の交流の場合は、変位電流が無視できるので次のようになる。

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 0 \quad (\text{変位電流} = 0)$$

$$\text{rot } H = J \quad (1)$$

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{div } B = 0 \quad (3)$$

$$\text{div } D = \rho \quad (4)$$

$$B = \mu H \quad (5)$$

$$J = \sigma E \quad (6)$$

(3)式より磁束の発散は常に0であるから磁気ベクトルポテンシャル A (Wb/m) が定義できる。

$$B = \text{rot } A \quad (7)$$

A が連続であるとする

$$\text{div } A = 0 \quad (8)$$

となる。この場合の A をクーロンゲージにおける磁気ベクトルポテンシャルという。二次元場では、常に、クーロンゲージが満たされている(保存的である)。ここで、 v

をテンソル磁気抵抗率とすると

$$\mathbf{H} = \mathbf{v} \mathbf{B} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \quad (10)$$

磁気抵抗率の対角成分以外を0とおける場合には、

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x & 0 & 0 \\ 0 & v_y & 0 \\ 0 & 0 & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

(11)式に(7)式を代入して

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x & 0 & 0 \\ 0 & v_y & 0 \\ 0 & 0 & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\text{rot } A)_x \\ (\text{rot } A)_y \\ (\text{rot } A)_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

今、対象とする領域に外部から電流（強制電流）が流入しており、その電流密度を J_0 とすれば、(1)式は、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \quad (13)$$

(9)式より

$$\text{rot} (\mathbf{v} \text{rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0 \quad (14)$$

(14)式を展開すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(v_z \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_y \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v_z \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(v_y \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) &= J_{0x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(v_x \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_z \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(v_x \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v_z \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) &= J_{0y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(v_y \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_z \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) &= J_{0z} \end{aligned} \quad (15)$$

二次元場では、 A および J_0 は、 Z 方向成分だけを有するので $A_x = A_y = 0$ 、 $J_{0x} = J_{0y}$

=0 とし、かつ、 A_z は Z 方向には一定であるとすれば、(15)式は、次のように簡略化される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_y \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -J_0 \quad (16)$$

さらに、 $A_z = \text{一定}$ より $A_z = A$ と改めておけば、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J_0 \quad (17)$$

(17)式が二次元場における静磁界の支配方程式であり、ポアソンの方程式と呼ばれる。

一方、励磁電流として交流電流を用いる場合は、被検査材中に渦電流が発生する。このような場合、(16)式は直接適用できない。(J_0 を強制電流と渦電流の和とする必要がある。) そこで、時間依存場に適用できる支配方程式を導出する。時間依存場の支配方程式を考える場合、未知数の選び方によって種々の方法が考えられるが、ここでは磁気ベクトルポテンシャル A と電位 ϕ を用いた方程式を導出する (A - ϕ 法)。ここで、特に注意しなければならないのは、渦電流が流れる領域は、導体部分に限られることである。また、積層されたけい素鋼板やアモルファスコアの中には流れないとして扱う。さらに、励磁コイルの中の渦電流も無視する。回転磁束型磁気センサの磁界解析に適用する場合は、被検査材や比較検査材、軟鉄製コアなどを対象にすれば、十分である。導体に鎖交する磁束が変化すると起電力が生じ渦電流が流れる。この渦電流密度 J_e は、

$$J_e = \sigma E_e \quad (18)$$

ここで、 E_e は電磁誘導によって生じた渦電流を流すための電界である。 E_e は、(2)、(7)式より

$$\text{rot } E_e = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } A) \quad (19)$$

$$\text{rot} \left(E_e + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0 \quad (20)$$

(20)式は、 $E_e + \frac{\partial A}{\partial t}$ が保存場であることを示している。よって、電位 ϕ が定義できる。

$$E_e + \frac{\partial A}{\partial t} = -\text{grad } \phi$$

$$E_e = -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \phi \quad (21)$$

(21)式の $\text{grad } \phi$ は渦電流によって作られる電界の基準を決めるための補正項であり電荷によってできる電界とは異なる。渦電流密度 J_e は、(18)、(21)式より、

$$J_e = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{grad } \phi \quad (22)$$

また、渦電流場の電流密度 J は、強制電流 J_0 と渦電流 J_e を用いて、

$$J = J_0 + J_e \quad (23)$$

と表すことができる。

ここで、磁界の強さ H が Z 軸方向に変化せず Z 軸方向に無限に長い導体に対する二次元場を考える。この場合、渦電流分布は、 Z 方向に一様となる。

次に、 Z が一定である断面 S_t について考える。電位 ϕ が S_t 上で一定でないとする。と、(22)式より、渦電流の X および Y 方向成分である J_{ex} 、 J_{ey} が存在することになる。従って、断面 S_t 上では、 X 、 Y の値如何によらず電位 ϕ は一定となる。ゆえに、 $\text{grad } \phi$ は断面 S_t 上で一定である。また、磁気ベクトルポテンシャル A 、および渦電流 J_e は、 Z 方向成分のみを有し、任意の時刻 t において $\frac{\partial A}{\partial t}$ 、 J_e は Z 方向に一定である。よって、(22)式より $\text{grad } \phi$ も Z 方向に一定となる。すなわち、 $\text{grad } \phi$ は一つの導体内で一定である。さらに、二次元場における $\text{grad } \phi$ は電荷保存則によって A の関数として一義的に表すことができる。すなわち、一つの導体の総断面積を、 S_t とすれば、導体内では、電荷の蓄積は、行われないので、(22)式より

$$\int_{S_t} J_{ez} dx dy = \int_{S_t} \sigma \left(-\frac{\partial A_z}{\partial t} - \text{grad } \phi \right) dx dy = 0 \quad (24)$$

が得られる。ここで、 $\text{grad } \phi$ は断面 S_t 内で一定であるから(24)式より次式が得られる。

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{S_t} \int_{S_t} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy \quad (25)$$

ただし、 J_{ez} 、 A_z は、 J_e 、 A の Z 方向成分である。さらに、

$$\text{rot} (\nabla \text{rot } A) = J_0 - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{grad } \phi \quad (26)$$

となる。ここで、渦電流と磁気ベクトルポテンシャルの Z 方向成分を J_{ez} 、 A_z とすれば、二次元場では、

$$J_{ez} = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{grad } \phi \quad (27)$$

となることを考慮すると(17)式は、二次元準定常場では、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J_0 + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \text{grad } \phi \quad (28)$$

となる。ただし、 A は、 A の Z 方向成分である。(28)式が渦電流を含む場合の二次元場における磁界解析の基本となる支配方程式である。ここで、励磁電流(強制電流)が正弦波電流であり、被検査材などの透磁率や導電率が非線形でないとすると、磁気ベクトルポテンシャルや強制電流を複素数近似することができる ($A \varepsilon^{j\omega t}$, $J \varepsilon^{j\omega t}$)。二次元場では、次のように表すことができる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_y \frac{\partial \dot{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial \dot{A}}{\partial y} \right) = -J_0 + j\omega\sigma \dot{A} + \sigma \text{grad } \phi \quad (29)$$

(29)式が渦電流を含む場合の線形二次元場における正弦波励磁時の磁界解析の基本となる支配方程式である。

2. ガラーキン (Galerkin) 法による積分方程式の導出

さて、磁束分布などを求めるときは、(28)式の偏微分方程式をある境界条件のもとで解かなければならないが、偏微分方程式のままでは、計算機では解けない。そこで、通常はこの偏微分方程式と等価な積分方程式を各種の手法で導き、導かれた積分方程式を計算機で解くのである。その手法の一つが、ガラーキン法である。

ガラーキン法は、重みつき残差法の一つであり、重み関数を形状関数に等しくする手法である。変分原理(エネルギー原理:ポテンシャルは、その系のエネルギーが最小になるように分布する。)が適用できる問題に対しては、ガラーキン法と変分法(汎関数を積分方程式とする解法)は、全く等しい有限要素法の連立方程式を導くことができる。このガラーキン法は、汎関数(電磁界解析においては、エネルギーを表す式に等しい。)を見いだせない支配方程式においても有限要素法を適用できるように積分方程式を導出できる利点がある。

強制電流が正弦波交流で渦電流を考慮しなければならない領域(被検査材中など)では、(28)式を満たさなければならない。また、(28)式を書き直すと、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J_0 - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{grad } \phi = 0 \quad (30)$$

ある一点におけるポテンシャル A の近似値 A' を(30)式に代入しても一般に(30)式は、0とならずに残差(Residual) R が残る。いま、微分方程式を

$$f(A) = 0 \quad (31)$$

とすれば、

$$f(A') = R \quad (32)$$

最良の解を得るには、残差 R の対象領域 S 全体にわたる積分 (和) が最小になるようにすればよい。これを式で表すと次のようになる。

$$\int_S R \, dx dy \rightarrow \text{minimum} \quad (33)$$

ここで、重み関数というものを導入すれば、領域全体で残差の重みつき積分を 0 にすることができる。いま、重み関数を w とすると、重みつき残差法の一般式は、次式で示される。ただし、重み関数 w は、任意に選んでよい。

$$\int_S w R \, dx dy = 0 \quad (34)$$

ここで、節点 i の形状関数 N_i を重み関数として、残差を重みつき積分したものを、 G_i^* とすれば、(34) 式は、次式となる。

$$G_i^* = \int_S N_i R \, dx dy = 0 \quad (35)$$

(35) 式の残差 R に (30) 式の右辺を代入すると、

$$G_i^* = \int_S N_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J_0 - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{grad } \phi \right\} dx dy = 0 \quad (36)$$

となる。また、

$$\frac{\partial}{\partial x} (y_1 y_2) = \frac{\partial y_1}{\partial x} y_2 + \frac{\partial y_2}{\partial x} y_1 \quad \text{より} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x} y_1 = \frac{\partial}{\partial x} (y_1 y_2) - \frac{\partial y_1}{\partial x} y_2 \quad \text{となるので}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N_i v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) + N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(N_i v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) + N_i \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right)$$

よって、

$$N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_i v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial N_i}{\partial x} v_y \frac{\partial A}{\partial x} \quad (37)$$

$$N_i \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(N_i v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \frac{\partial N_i}{\partial x} v_x \frac{\partial A}{\partial y}$$

(37) 式を (36) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned}
G_i^* &= \int_s \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(N_i v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_i v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right\} dx dy \\
&\quad - \int_s \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right\} dx dy \\
&\quad + \int_s N_i \left(J_0 - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{grad } \phi \right) dx dy \\
&= 0
\end{aligned} \tag{38}$$

ここで、次のグリーンの定理を適用すれば、

$$\int_s \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dx dy = \int_c (g dx - f dy) = \int_c g dx - \int_c f dy \tag{39}$$

(39)式の右辺第二項は、次のように変形される。

$$\int_s \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right\} dx dy = \int_c N_i \left(v_y \frac{\partial A}{\partial x} dy - v_x \frac{\partial A}{\partial y} dx \right) \tag{40}$$

ここで、Cは領域の境界にそう閉路である。(40)式は、境界Cを自然境界として扱う場合は、0となる。(ポテンシャルの流速値が0。境界に対してポテンシャル線が垂直。) (40)式を0とおけば、(37)式は、

$$G_i = \int_s \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(N_i v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_i v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right\} dx dy - \int_s N_i \left(J_0 - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{grad } \phi \right) dx dy = 0 \tag{41}$$

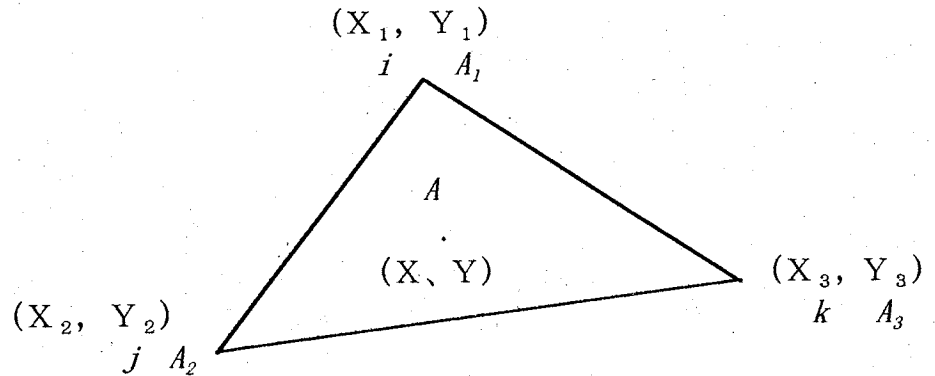
この(41)式が渦電流を含む場での積分方程式である。ただし、 $-G_i^*$ を新たに G_i とおいた。(41)式の積分は、領域全体にわたる積分であり、 N_i も領域全体で定義されるが、実際に計算を行う際は、各要素ごとに N_{ie} を定義し、各要素で積分したものを加え合わせればよい。また、 N_{ie} の値は、節点 ie を共有する要素以外の領域では、零であるため(41)式は、節点 ie を含む領域についてのみ積分すればよく、次式となる。

$$G_i = \sum_{R_i} \left[\int_s \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(N_i v_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_i v_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right\} dx dy - \int_s N_i \left(J_0 - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{grad } \phi \right) dx dy \right] = 0 \tag{42}$$

3. 積分方程式の離散化

有限要素法では、領域を小領域に分割しその小領域中では、磁気ベクトルポテンシャルなどの我々が求めようとしている未知数が簡単な式で表されると言う仮定に基づいた解法であることはすでに述べた。一般に分割された小領域は三角形を用いる。

解析領域を三角形要素で分割すると、三角形内の任意の点 (X、Y) の磁気ベクトルポテンシャル A は、考えている三角形の頂点 (節点) の磁気ベクトルポテンシャル A_1 、 A_2 、 A_3 を用いて、



$$A = N_1 A_1 + N_2 A_2 + N_3 A_3 = \sum_{i=1}^3 N_i A_i \quad (43)$$

のように線形近似できる。この N_i を形状関数といい (X、Y) の関数である。

以下の解析では、解析を容易にするため磁気抵抗率 ν を材質内 (被検査材中) で一定であるとする。次に、(41)式を変形した式を示す。

$$G_i = \int_s \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(N_i \nu_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_i \nu_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right\} dx dy \quad (44)$$

$$- \int_s J_0 N_i dx dy + \int_s \sigma N_i \frac{\partial A}{\partial t} dx dy + \int_s \sigma N_i \text{grad } \phi dx dy = 0$$

(44)式は、考えなければならない領域を小さい要素に分割した場合に各三角形要素それぞれの内部で磁気ベクトルポテンシャル A が満たすべき方程式である。これを、計算機による数値積分が可能となるように離散化する。その後、領域全体に拡張した行列 (マトリクス) 方程式を立て、それを解くことによって各三角形の節点 (頂点) の磁気ベクトルポテンシャル A を求める。以下、この方程式の離散化の方法を詳しく述べてゆく。

三角形要素内では、磁気ベクトルポテンシャル A は、次の一次式で近似する。また、座標 (X、Y) は、三角形内の点とする。

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y \quad (45)$$

さらに、各節点の座標を、 (X_1, Y_1) 、 (X_2, Y_2) 、 (X_3, Y_3) とし、各節点のポテンシャル（磁気ベクトルポテンシャル）値を A_1 、 A_2 、 A_3 とすると、

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 Y_1 \\ A_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 Y_2 \\ A_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 X_3 + \alpha_3 Y_3 \end{aligned} \quad (46)$$

これを、マトリクス表示すると

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (47)$$

この式より線形係数 α_1 、 α_2 、 α_3 を求めると、

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (48)$$

ここで、三角形の面積を S とおくと

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix} \quad (49)$$

となる事が知られている。これを用いて(48)式は、

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} X_2 Y_3 - X_3 Y_2 & X_3 Y_1 - X_1 Y_3 & X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \\ Y_2 - Y_3 & Y_3 - Y_1 & Y_1 - Y_2 \\ X_3 - X_2 & X_1 - X_3 & X_2 - X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (50)$$

また、(45)式は、マトリクス表示でき

$$A = \begin{bmatrix} 1 & X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

となる。(50)式を(51)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} 1 & X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 Y_3 - X_3 Y_2 & X_3 Y_1 - X_1 Y_3 & X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \\ Y_2 - Y_3 & Y_3 - Y_1 & Y_1 - Y_2 \\ X_3 - X_2 & X_1 - X_3 & X_2 - X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} 1 & X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 Y_3 - X_3 Y_2 \\ Y_2 - Y_3 \\ X_3 - X_2 \end{bmatrix} A_1 + \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} 1 & X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_3 Y_1 - X_1 Y_3 \\ Y_3 - Y_1 \\ X_1 - X_3 \end{bmatrix} A_2 \\
&\quad + \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} 1 & X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \\ Y_1 - Y_2 \\ X_2 - X_1 \end{bmatrix} A_3 \\
&= \frac{1}{2S} \left\{ (X_2 Y_3 - X_3 Y_2) + (Y_2 - Y_3) X + (X_3 - X_2) Y \right\} A_1 \\
&\quad + \frac{1}{2S} \left\{ (X_3 Y_1 - X_1 Y_3) + (Y_3 - Y_1) X + (X_1 - X_3) Y \right\} A_2 \tag{52} \\
&\quad + \frac{1}{2S} \left\{ (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) + (Y_1 - Y_2) X + (X_2 - X_1) Y \right\} A_3
\end{aligned}$$

ここで、(52)式と(43)式を比べると、形状関数 N_1 、 N_2 、 N_3 は、

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{2S} \left\{ (X_2 Y_3 - X_3 Y_2) + (Y_2 - Y_3) X + (X_3 - X_2) Y \right\} \\
N_2 &= \frac{1}{2S} \left\{ (X_3 Y_1 - X_1 Y_3) + (Y_3 - Y_1) X + (X_1 - X_3) Y \right\} \tag{53} \\
N_3 &= \frac{1}{2S} \left\{ (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) + (Y_1 - Y_2) X + (X_2 - X_1) Y \right\}
\end{aligned}$$

で表されることが分かる。

節点番号の 1、2、3 を i 、 j 、 k で置き換えて一般化すると、

$$N_i = \frac{1}{2S} \left\{ (X_j Y_k - X_k Y_j) + (Y_j - Y_k) X + (X_k - X_j) Y \right\} \tag{54}$$

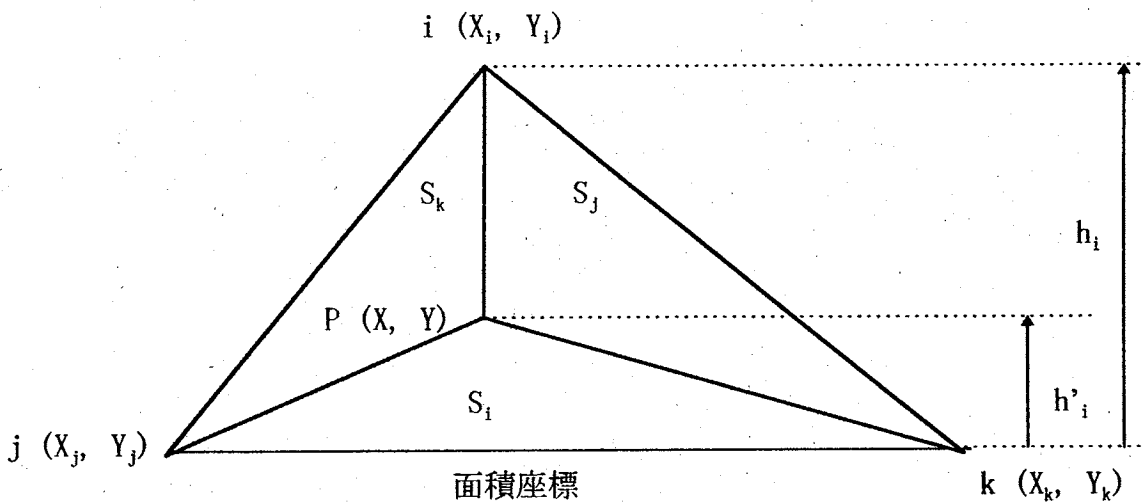
と表される。ここで添字 i 、 j 、 k は、循環する添字で N_i を求める場合、上式中の添字 j を k に、添字 k を i に書き換えることでもとまる。 N_k に対しても同様である。

ここで形状関数 N_i の別の意味について考えることとする。(54)式から、

$$N_i = \frac{1}{2S} \left\{ (X_j Y_k - X_k Y_j) + (Y_j - Y_k) X + (X_k - X_j) Y \right\} = \frac{1}{2S} \begin{vmatrix} 1 & X & Y \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} \quad (55)$$

(55)式は、 (X, Y) 、 (X_j, Y_j) 、 (X_k, Y_k) を頂点とする三角形の面積 S_i を用いて、

$$N_i = \frac{2S_i}{2S} = \frac{S_i}{S} \quad N_j = \frac{S_j}{S} \quad N_k = \frac{S_k}{S} \quad (56)$$



上図より、形状関数 N_i 、 N_j 、 N_k は、三角形の全面積と部分三角形の比を示している。 N_i 、 N_j 、 N_k を自然座標と考えると、部分三角形の比であるので面積座標と呼ばれる座標系と一致する。一般に面積座標は、 $[L_i, L_j, L_k]$ で表され、次のように定義される。

$$L_i = \frac{S_i}{S} \quad L_j = \frac{S_j}{S} \quad L_k = \frac{S_k}{S} \quad (57)$$

$$S = S_i + S_j + S_k \quad (58)$$

より、

$$1 = L_i + L_j + L_k \quad (59)$$

なる関係がある。また、

$$N_i = L_i \quad N_j = L_j \quad N_k = L_k \quad (60)$$

である。この面積座標を用いると線積分、面積分の計算が簡単に行える積分公式が利用できる。この公式は、線積分、面積分は、

$$\int_{\Gamma_{12}} L_i^a L_j^b d\Gamma = \frac{a! b!}{(a+b+1)!} l_{ij} \quad (\text{ただし、} l_{ij} \text{ は、辺 } i-j \text{ の長さ}) \quad (61)$$

$$\int_{\Omega} L_i^a L_j^b L_k^c d\Omega = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} 2S \quad (62)$$

となる。

ここまで形状関数について述べてきたが、これを用いて(44)式を離散化する。式の簡単化のため(54)式を次のように書き直すことにする。

$$N_i = \frac{1}{2S} \{a_i + b_i X + c_i Y\} \quad (63)$$

ただし、 a_i 、 b_i 、 c_i は、それぞれ、

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j$$

$$b_i = Y_j - Y_k \quad (64)$$

$$c_i = X_k - X_j$$

である。これを用いると、(43)式より、(ただし、1、2、3を i 、 j 、 k に書き換えた。)

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \sum_{\Gamma} \frac{\partial N_i}{\partial x} A_i = \frac{1}{2S} \sum_{\Gamma} b_i A_i \quad (65)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \sum_{\Gamma} \frac{\partial N_i}{\partial y} A_i = \frac{1}{2S} \sum_{\Gamma} c_i A_i \quad (66)$$

のようになる。(44)式を書き直すと、

$$G_i = \int_s v \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) A dx dy - \int_s J_0 N_j dx dy \quad (67)$$

$$+ \int_s \sigma N_j \frac{\partial A}{\partial t} dx dy + \int_s \sigma N_j \text{grad } \phi dx dy = 0$$

となる。なお、混同を防ぐため重み関数に用いた N_i を N_j と書き直している。この N_j において $j=1, 2, 3$ と置くことによって(67)式から次の3つの式が得られる。また、 $v_x = v_y = v$ とした。

$$\int_s v \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) A \, dxdy - \int_s J_0 N_1 \, dxdy$$

(68a)

$$+ \int_s \sigma N_1 \frac{\partial A}{\partial t} \, dxdy + \int_s \sigma N_1 \text{grad } \phi \, dxdy = 0$$

$$\int_s v \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) A \, dxdy - \int_s J_0 N_2 \, dxdy$$

(68b)

$$+ \int_s \sigma N_2 \frac{\partial A}{\partial t} \, dxdy + \int_s \sigma N_2 \text{grad } \phi \, dxdy = 0$$

$$\int_s v \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) A \, dxdy - \int_s J_0 N_3 \, dxdy$$

(68c)

$$+ \int_s \sigma N_3 \frac{\partial A}{\partial t} \, dxdy + \int_s \sigma N_3 \text{grad } \phi \, dxdy = 0$$

この3式をまとめるためには、行列を用い、

$$[N]^T = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

(69)

と置くことによって、

$$\int_s v \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) A \, dxdy - \int_s J_0 [N]^T \, dxdy$$

(70)

$$+ \int_s \sigma [N]^T \frac{\partial A}{\partial t} \, dxdy + \int_s \sigma [N]^T \text{grad } \phi \, dxdy = 0$$

と書くことができる。また、同様に(43)式も

$$A = N_1 A_1 + N_2 A_2 + N_3 A_3 = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = [N] \{A\}$$

(71)

と書くことができる。これによって、

$$\int_s v \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} \{A\} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \{A\} \right) A dx dy - \int_s J_0 [N]^T dx dy$$

(72)

$$+ \int_s \sigma [N]^T \frac{\partial A}{\partial t} dx dy + \int_s \sigma [N]^T \text{grad } \phi dx dy = 0$$

が得られる。以下、(72)式の第一項と第二項、第三項、第四項についてそれぞれ離散化を行う。また、(63)式より

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{2S} b_j \quad \frac{\partial N_j}{\partial y} = \frac{1}{2S} c_j \quad (73)$$

まず、第一項は、(65)、(66)、(73)式を用いて、

$$\frac{v}{4S^2} \int_s \left([b_1 \ b_2 \ b_3]^T [b_1 \ b_2 \ b_3] \{A\} + [c_1 \ c_2 \ c_3]^T [c_1 \ c_2 \ c_3] \{A\} \right) dx dy \quad (74)$$

となる。 b_i c_i $\{A\}$ は定数なので上記積分は、積分演算子内の式に三角形の面積 S を乗じることで得られる。(74)式より、

$$\begin{aligned} & \frac{v}{4S^2} \int_s \left([b_1 \ b_2 \ b_3]^T [b_1 \ b_2 \ b_3] \{A\} + [c_1 \ c_2 \ c_3]^T [c_1 \ c_2 \ c_3] \{A\} \right) dx dy \\ &= \frac{v}{4S} \left([b_1 \ b_2 \ b_3]^T [b_1 \ b_2 \ b_3] \{A\} + [c_1 \ c_2 \ c_3]^T [c_1 \ c_2 \ c_3] \{A\} \right) \\ &= \frac{v}{4S} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \{A\} \end{aligned} \quad (75)$$

が得られる。また、第二項は、 v も J_0 も定数なので、面積座標の面積分公式、(62)式を用いて

$$\begin{aligned} \int_s J_0 [N]^T dx dy &= J_0 \int_s [N_1 \ N_2 \ N_3]^T dx dy \\ &= J_0 \left[\frac{1!}{(1+2)!} 2S \frac{1!}{(1+2)!} 2S \frac{1!}{(1+2)!} 2S \right]^T = S \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} J_0 \end{aligned} \quad (76)$$

と離散化できる。さらに、第三項は、

$$\int_s \sigma N_i \frac{\partial A}{\partial t} dx dy = \sigma \int_s N_i dx dy \frac{\partial \{A\}}{\partial t} \quad (77)$$

であり、

$$\begin{aligned} \sigma \int_s [N]^T [N] dx dy \frac{\partial \{A\}}{\partial t} &= \sigma \int_s \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} [N_1 N_2 N_3] dx dy \frac{\partial \{A\}}{\partial t} \\ &= \sigma \int_s \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 \\ N_2 N_1 & N_2^2 & N_2 N_3 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3^2 \end{bmatrix} dx dy \frac{\partial \{A\}}{\partial t} \\ &= \sigma \begin{bmatrix} \int_s N_1^2 dx dy & \int_s N_1 N_2 dx dy & \int_s N_1 N_3 dx dy \\ \int_s N_2 N_1 dx dy & \int_s N_2^2 dx dy & \int_s N_2 N_3 dx dy \\ \int_s N_3 N_1 dx dy & \int_s N_3 N_2 dx dy & \int_s N_3^2 dx dy \end{bmatrix} \frac{\partial \{A\}}{\partial t} \end{aligned}$$

ここで面積積分の公式を適用して、

$$\begin{aligned} \int_s N_1^2 dx dy &= \frac{2!}{(2+2)!} 2S \quad \int_s N_1 N_2 dx dy = \frac{1! 1!}{(1+1+2)!} 2S \quad \dots \quad \text{より} \\ &= \frac{\sigma S}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial \{A\}}{\partial t} \quad (78) \end{aligned}$$

となり、これで第三項の離散化ができた。さらに、第四項は、

$$\int_s \sigma N_i \text{grad } \phi dx dy = \sigma \int_s [N]^T \text{grad } \phi dx dy = \sigma S \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{grad } \phi \quad (79)$$

よって、離散化された式は、

$$\frac{v}{4S} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \{A\} = S \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} J_0 - \frac{\sigma S}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\partial \{A\}}{\partial t} - \sigma S \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{grad } \phi \quad (80)$$

となる。また、(80)式の $\text{grad } \phi$ は、考えている三角形の面積を S とし、導体の断面積を、 S_t とすると、

$$S_t \text{grad } \phi = - \int_s \frac{\partial A}{\partial t} dx dy = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s [N] \{A\} dx dy = - \int_s [N_1 N_2 N_3] dx dy \frac{\partial \{A\}}{\partial t}$$

$$= -2S \left[\frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6} \right] \frac{\partial \{A\}}{\partial t}$$

よって、

$$\text{grad } \phi = - \frac{S}{S_t} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3} \right] \frac{\partial \{A\}}{\partial t} \quad (81)$$

(80)式と(81)式を連立して解けばよい。

4. 時間微分項の取り扱い

次に、磁気ベクトルポテンシャル A の時間微分項の取り扱いについて考察する。時間微分項を取り扱う場合、各種の方法があるが複素近似法について説明する。複素近似法は、 A 、 J などの諸量が全て正弦的な時間変化をしていると仮定できる場合に使用される方法で、時間微分を $j\omega$ に変換して解くことにする。

$\dot{A} = A \varepsilon^{j\omega t}$ と置けば、 $\frac{\partial \dot{A}}{\partial t} = j\omega \dot{A}$ より、 \dot{A} を改めて A と置くと(79)式は、

$$\frac{v}{4S} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \{A\} = S \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} J_0 - j\omega \frac{\sigma S}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \{A\} - \sigma S \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{grad } \phi \quad (82)$$

また、(81)式は、

$$\text{grad } \phi = -j\omega \frac{S}{S_t} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3} \right] \{A\} \quad (83)$$

(82)式と(83)式を連立し、考えている領域全体に渡って重ね合わせた式を解けば、領域内の三角形の各頂点の磁気ベクトルポテンシャルが求められる。複素数型の連立一次方程式を解くアルゴリズムは、ガウス・ジョルダン法などがある。

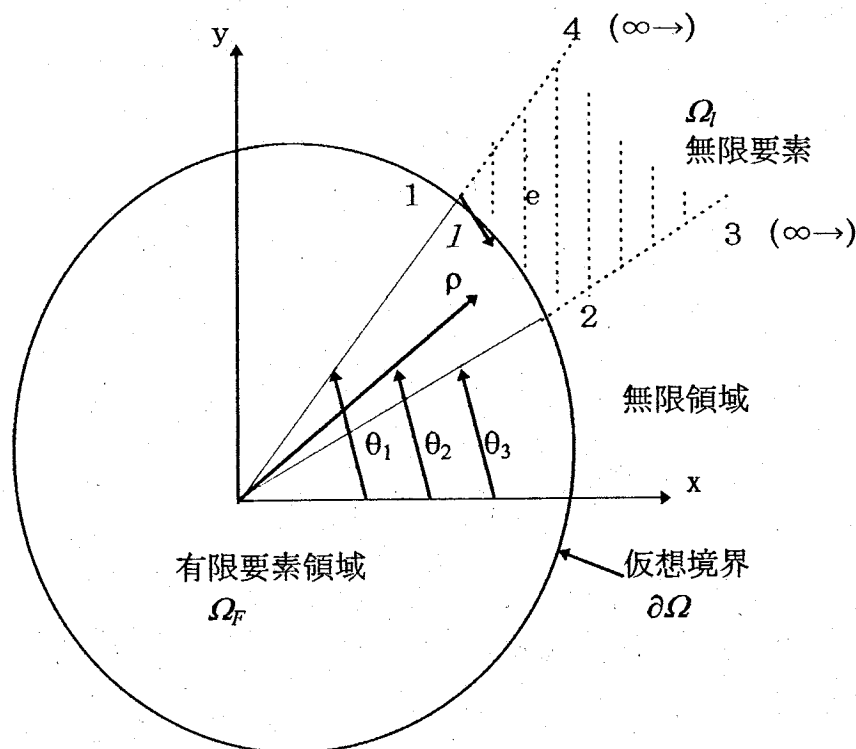
5. 開領域問題の取り扱い^[99]

構造分野などで用いられる有限要素法では、一般に、考えている領域以外の領域との境界では、自然境界条件または固定境界条件が成立しているという条件だけで十分な場合が多い。しかし、電磁界解析、特に磁界解析に有限要素法を適用する場合は、磁気抵抗率の非常に小さい材料が存在しないことから完全に閉じた空間を作ることができない。また、有限の領域だけの考察では磁界分布が正確に求められないことから考察領域が十分に広くとれない場合は、何らかの近似を導入しなければならない。

このような問題に対処するために、無限領域を仮想境界により有限領域と半無限領域に分割してそれぞれを解析して、次にこれらを結合する考え方が必要である。このような手法は、コンビネーション法と呼ばれる。詳細な情報を必要とする有限領域は、通常有限要素法で離散化し解析する。半無限領域の離散化には幾つかの方法がある。この考えている領域の仮想境界から無限遠までを近似する方法の一つとして、本論文で使用した、比較的精度の良いハイブリッド無限要素法を説明する。

6. ハイブリッド無限要素法

下図に示すように外部領域を半無限の帯状要素に分割し、この領域が仮想境界上の接点によって表現されるようにすれば、外部領域を組み込むことができる。これを無限要素と呼ぶ。ここでは、ハイブリッド変分原理に基づく無限要素を説明する。



解析領域を仮想境界 $\partial\Omega$ で有限領域 Ω_f と無限領域 Ω_i に分け、 Ω_f には通常の有限要素法、 Ω_i は多数の放射状の無限要素に分割する。外部領域 Ω_e には、電流源がないものとするれば、場は、ラプラスの式 $\nabla^2\phi=0$ を満たす。従って、 Ω_i におけるハイブリッド汎関数 L_h は、

$$L_h = \int_{\partial\Omega} \check{\phi} q \, dl - \frac{1}{2} \iint_{\Omega_i} (\nabla\phi)^2 \, dx dy - \int_{\partial\Omega} \check{\phi} \hat{q} \, dl \quad (84)$$

の形にかける。ここで、 ϕ 、 $\check{\phi}$ は、それぞれ領域 Ω_i 内、境界 $\partial\Omega$ 上で定義されるポテンシャル、 q は、 $\partial\Omega$ に対する法線方向フラックス、 $(\hat{\quad})$ は、既知量を表す。(84)式の右辺第2項に部分積分を適用し、 $\nabla^2\phi=0$ の関係を用いると次式の境界積分型の汎関数となる。

$$L_h = \int_{\partial\Omega} \check{\phi} q \, dl - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \phi q \, dl - \int_{\partial\Omega} \check{\phi} \hat{q} \, dl \quad (85)$$

離散化は、まず、境界 $\partial\Omega$ 上でポテンシャル $\check{\phi}$ は、節点ポテンシャルベクトル $\{\check{\phi}\}$ および、内挿関数 $\{N\}$ を用いて次のように近似される。

$$\check{\phi} = \{N\}^T \{\phi\} \quad (86)$$

無限領域 Ω_i のポテンシャル ϕ の一般解は、次のようになる。

$$\phi(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^N (\beta_i \cos i\theta + \beta_{i+N} \sin i\theta) / \rho^i \quad (87)$$

ここで、 β_i は、未定乗数である。(87)式は、二次元ラプラスの式を満たしている。したがって、 ϕ 、 q は、次の形となる。

$$\phi = \{a\}^T \{\beta\} \quad q = \frac{\partial\phi}{\partial n} = \{a_n\}^T \{\beta\} \quad (88)$$

$\{a_n\}$ および $\{a\}^T$ は、(87)式で簡単のために、 $N=1$ とすると、

$$\{a\} = \left\{ \frac{\cos \theta}{\rho}, \frac{\sin \theta}{\rho} \right\} \quad (89)$$

$$\{a_n\} = \{n_x, n_y\} \frac{1}{\rho^2} \begin{bmatrix} -\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta \quad \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

ここで、 n_x 、 n_y は、法線方向ベクトルの方向余弦である。(86)式、および(88)式を用いれば、無限領域に関する汎関数は、

$$L_h = \{\beta\}^T [G] \{\bar{\phi}\} - \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\bar{\phi}\} \{\bar{q}\} \quad (90)$$

ここで、 $[G]$ 、 $[H]$ は、

$$[H] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\{a\} \{a_n\}^T + \{a_n\} \{a\}^T \right) dl \quad (91)$$

$$[G] = \int_{\Omega} \{a_n\} \{N\}^T dl \quad (92)$$

(90)式の未定乗数ベクトル $\{\beta\}$ は、汎関数 L_h の $\{\beta\}$ に関する停留性より消去することができる。すなわち、 $\delta L_h = 0$ より次式が得られる。

$$L_h = \frac{1}{2} \{\bar{\phi}\}^T [G]^T [H]^{-1} [G] \{\bar{\phi}\} - \{\bar{\phi}\} \{\bar{q}\} \quad (93)$$

したがって、無限領域の係数マトリクス $[S]$ は、

$$[S] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad (94)$$

となる。 $[S]$ は、一般にフルマトリクスである。

無限領域を放射帯状の無限要素に分割する。無限要素 e は、前図の斜線で示すように4節点である。 $\bar{\phi}$ の内挿関数を境界1-2, 2-3, 4-1について次のように選ぶ。

$$\begin{aligned} \{N\}_{12} &= \begin{Bmatrix} 1 & -\frac{l}{l_{12}} & \frac{l}{l_{12}} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \\ \{N\}_{23} &= \begin{Bmatrix} 0 & \frac{\rho_2}{\rho} & 1 & -\frac{\rho_2}{\rho} & 0 \end{Bmatrix} \\ \{N\}_{41} &= \begin{Bmatrix} \frac{\rho_1}{\rho} & 0 & 0 & 1 & -\frac{\rho_1}{\rho} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (95)$$

(91)、(92)は、要素境界に関する積分である。境界1-2では、ガウス積分などによる数値積分を用いることになるが、2-3および4-1については解析的に求めることができる。結果を示す。

$$[H]_{23} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_2 \sin \theta_2}{2\rho_2^2} & \frac{\sin^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2}{4\rho_2^2} \\ \frac{\sin^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2}{4\rho_2^2} & -\frac{\cos \theta_2 \sin \theta_2}{2\rho_2^2} \end{bmatrix} \quad (96)$$

$$[G]_{23} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin \theta_2}{2\rho_2} \\ 0 & -\frac{\cos \theta_2}{2\rho_2} \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$[H]_{41} = \begin{bmatrix} \frac{-\cos \theta_1 \sin \theta_1}{2\rho_1^2} & \frac{\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1}{4\rho_2^2} \\ \frac{\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1}{4\rho_1^2} & \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_1}{2\rho_1^2} \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$[G]_{41} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \theta_1}{2\rho_1} & 0 \\ \frac{\cos \theta_1}{2\rho_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (99)$$

このようにして得られたマトリックスから

$$[H]_e = [H]_{12} + [H]_{23} + [H]_{41} \quad (100)$$

$$[G]_e = [G]_{12} + [G]_{23} + [G]_{41} \quad (101)$$

が得られ、無限要素の2節点表示

$$[S]_e = [G]_e^T [H]_e^{-1} [G]_e \quad (102)$$

が完成する。これから作られた外部領域の係数マトリックスは、バンドマトリックスである。