

第2章 PWM コンバータの動特性

本章では，DC-DC コンバータの動特性解析に有効である状態平均化法について概説し，降圧形コンバータについて状態平均化法を用いて，負荷の小振幅変動時の動特性解析を行う。また，負荷がステップ状に大きく変動したときの出力応答について，簡易モデルを用いて出力コンデンサの等価直列インダクタンス(ESL)，等価直列抵抗(ESR)の影響を整理する。

2. 1 状態平均化法

スイッチング方式の DC-DC コンバータの動作解析は，スイッチがオン，オフを繰り返し回路が非線形となるため，個々のスイッチの状態において解析することはそれほど困難ではないものの，それらを連なった構成のものとしてつなぎ合わせて解を得ることは容易ではない。そのためオン，オフの動作を平均化して一つのモデルとする解析方法が用いられる。その平均化する解析方法には，状態空間平均化モデルと平均化回路モデルの2つのモデルによる方法がある。

(1) 状態空間平均化モデル [2], [3], [35]

回路の状態空間表現を基に平均化し，小信号動作について近似的に状態空間形式の平均化モデルを導く。回路をより厳密にモデル化でき，汎用的な解析方法である。

(2) 平均化回路モデル [36]-[40]

パワー回路の平均的な動作を記述するために，スイッチの端子変数の

平均値よりスイッチを平均化した等価回路モデルで表わし，小信号動作を近似的に記述できる線形回路を導く。例えば PWM スイッチは，図 2.1 に示すように，リアクトル及びコンデンサの値が十分大きくリアクトル電流とコンデンサ電圧に含まれるリップル成分は無視でき，コンバータのリアクトルとコンデンサがそれぞれ直流電流源と直流電圧源に等価である場合，スイッチング周期を平均化区間として時比率 D を用いて等価平均化回路モデルで表わすことができる。この平均化回路モデルでは，状態方程式を導かずに回路的に解くことができ，また，Spice などの回路シミュレーションを実行することが容易である。

2. 1. 1 状態平均化方程式

ここでは，本論の解析に用いた状態平均化法について概説する。

コンバータの 1 スwitchング周期 T_s において，スイッチがオンとなる時刻を $t = kT_s$ (k は正の整数) とし，オン時間： $kT_s \leq t \leq kT_s + DT_s$ ，オフ時間： $kT_s + DT_s \leq t \leq \overline{k+1}T_s$ とする。回路の電圧，電流を要素とする状態ベクトル x が，スイッチのオン・オフ状態に対して次の状態方程式と出力方程式で表わされるものとする。

スイッチ・オン時： $kT_s \leq t \leq kT_s + DT_s$

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_1x(t) + b_1V_i \quad (2.1)$$

$$y(t) = c_1x(t) \quad (2.2)$$

スイッチ・オフ時： $kT_s + DT_s \leq t \leq \overline{k+1}T_s$

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_2x(t) + b_2V_i \quad (2.3)$$

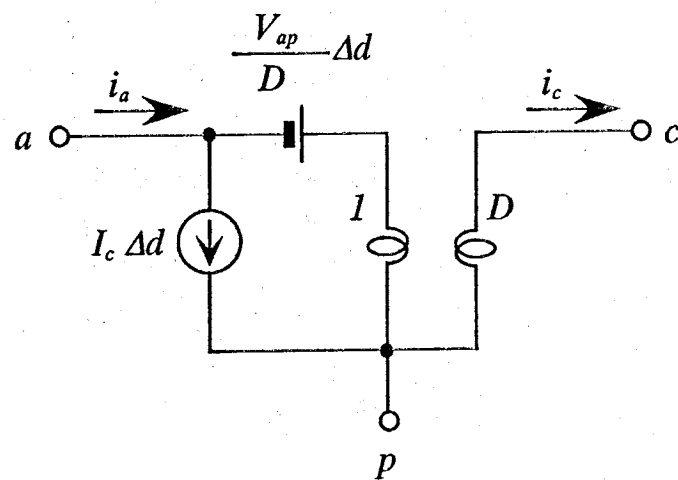
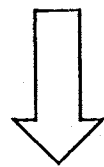
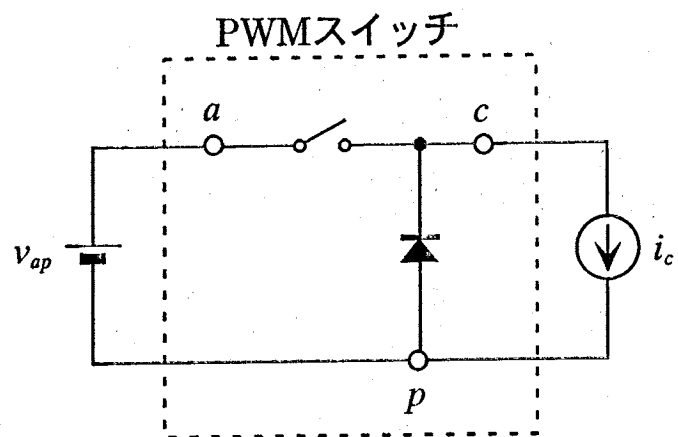


図2.1 PWMスイッチの等価平均化回路モデル

$$y(t) = c_2 x(t) \quad (2.4)$$

ここで、 V_i は入力電圧である。

このとき、各状態方程式の解は次式で与えられる。

$$(kT_s \leq t \leq kT_s + DT_s)$$

$$x(t) = \exp\{A_1(t - kT_s)\} x(kT_s) + \int_{kT_s}^t \exp\{A_1(t - \tau)\} b_1 V_i d\tau \quad (2.5)$$

$$(kT_s + DT_s \leq t \leq \overline{k+1}T_s)$$

$$x(t) = \exp\{A_2(t - kT_s - DT_s)\} x(kT_s + DT_s) + \int_{kT_s + DT_s}^t \exp\{A_2(t - \tau)\} b_2 V_i d\tau \quad (2.6)$$

スイッチのオン・オフの境界点において状態ベクトルが連続であれば、

(2.6)式の初期値 $x(kT_s + DT_s)$ は、(2.5)式より、

$$\begin{aligned} x(kT_s + DT_s) &= \left[\exp\{A_1(t - kT_s)\} x(kT_s) + A_1^{-1} \left[\exp\{A_1(t - kT_s)\} - I \right] b_1 V_i \right]_{t=kT_s+DT_s} \quad (2.7) \\ &= \exp(A_1 DT_s) x(kT_s) + A_1^{-1} \{ \exp(A_1 DT_s) - I \} b_1 V_i \end{aligned}$$

となり、1周期の最終値 $x(\overline{k+1}T_s)$ は(2.6)、(2.7)式より、 $D = 1 - D$ とお

くと

$$\begin{aligned} x(\overline{k+1}T_s) &= \exp\{A_2(T_s - DT_s)\} \left[\exp(A_1 DT_s) x(kT_s) + A_1^{-1} \{ \exp(A_1 DT_s) - I \} b_1 V_i \right] \\ &\quad + A_2^{-1} \left[\exp\{A_2(T_s - DT_s) - I\} \right] b_2 V_i \quad (2.8) \\ &= \exp\{(A_1 D + A_2 D')T_s\} x(kT_s) + \exp(A_2 D' T_s) A_1^{-1} \{ \exp(A_1 DT_s) - I \} b_1 V_i \\ &\quad + A_2^{-1} \{ \exp(A_2 D' T_s) - I \} b_2 V_i \end{aligned}$$

となる。ところで、行列の関数 $\exp(At)$ は、無限行列級数

$$\exp(At) = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots \quad (2.9)$$

で定義されるから、(2.8)式において A_1 、 A_2 の各要素と T_s の積が 1 より十分小さいと仮定し、2次以上の項を無視して線形近似すると、

$$\begin{aligned}
x(\overline{k+1}T_s) &\approx (I + A_1DT_s + A_2D'T_s)x(kT_s) + (I + A_2D'T_s)A_1^{-1}A_1DT_sb_1V_i + A_2^{-1}A_2D'T_sb_2V_i \\
&\approx \{I + (A_1D + A_2D')T_s\}x(kT_s) + (b_1D + b_2D')T_sV_i
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

を得る。よって

$$\frac{x(\overline{k+1}T_s) - x(kT_s)}{T_s} = Ax(kT_s) + bV_i \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
A &= DA_1 + D'A_2 \\
b &= Db_1 + D'b_2
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

となる。(2.1), (2.3)式は, 1 スイッチング周期の $x(kT_s)$ の代表値で考えた (2.11)式の差分方程式に近似的にまとめることができる。ここで離散変数 kT_s を連続変数 t に置き換えると, 1 スイッチング周期の平均値 $\bar{x}(t)$ について,

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t) = A\bar{x}(t) + bV_i \tag{2.13}$$

で近似することができる。ここでは, スイッチがオンとなる時刻を時間原点としたが, スイッチがオフとなる時刻を時間原点に選んでも同様の結果が得られる。(2.13)式は形式的には(2.1), (2.3)式をスイッチのオン・オフ時間に応じて重みを付け平均化した簡単な形で表わされており, 状態平均化方程式と呼ばれ, スイッチングレギュレータの動作解析の上で基本的な方程式となる。また, この式での状態ベクトルは各期間の境界で連続であることが必要であり, 一般にリアクトルを流れる電流 (または磁束) とコンデンサの電圧が選ばれる。なお, コンバータがリアクトル電流不連続モードで動作している場合には, スイッチがオフの期間をリアクトル電流が正の期間と零の期間に分けることにより, 状態平均化法を適用できる。

一方、コンバータの出力に関して、その平均値は

$$\bar{y}(kT_s) = \frac{1}{T_s} \left\{ \int_{kT_s}^{kT_s+DT_s} c_1 x(t) dt + \int_{kT_s+DT_s}^{(k+1)T_s} c_2 x(t) dt \right\} \quad (2.14)$$

となる。オン・オフ期間の状態変数を離散値 $x(kT_s)$ で近似し、連続値に置き換えれば、

$$\bar{y}(t) = c \bar{x}(t) \quad (2.15)$$

となる。ここで、

$$c = Dc_1 + D'c_2 \quad (2.16)$$

出力もスイッチのオン・オフ時間で平均した形で表わされる。

2. 1. 2 静特性

定常状態では、リアクトル電流とコンデンサ電圧の平均値には変化がなく、直流値となり、

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = 0 \quad (2.17)$$

となる。従って、定常状態におけるリアクトル電流とコンデンサ電圧は、(2.13)式より

$$X = -A^{-1}bV_i \quad (2.18)$$

となる。

コンバータの出力は、式(2.15)より

$$Y = cX = -cA^{-1}bV_i \quad (2.19)$$

となる。これらの式よりコンバータの静特性である電圧変換率、負荷特性、リップル率などが求められる。

2. 1. 3 動特性

定常状態において，入力電圧，時比率，負荷抵抗などが微小変動したときの各状態変数の変化との関係式を求める。入力電圧 V_i ，時比率 D ，負荷抵抗 R などにそれぞれ微小変動 $\Delta v_i(t)$ ， $\Delta D(t)$ ， $\Delta R(t)$ を与えた場合，状態変数 $\bar{x}(t)$ に微小変動 $\Delta x(t)$ が生じる。式(2.13)と式(2.15)において， $V_i \rightarrow V_i + \Delta v_i(t)$ ， $D \rightarrow D + \Delta D(t)$ ， $R \rightarrow R + \Delta R(t)$ に対して， $\bar{x} \rightarrow X + \Delta x(t)$ ， $\bar{y} \rightarrow Y + \Delta y(t)$ とし，さらに2次の微小項を無視して線形近似すると，次の式が導出される。

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A\Delta x + [(A_1 - A_2)X + (b_1 - b_2)V_i]\Delta D + b\Delta v_i + \frac{\partial A}{\partial R}X\Delta R \quad (2.20)$$

$$\Delta Y = c\Delta x + (c_1 - c_2)X\Delta D + \frac{\partial c}{\partial R}X\Delta R \quad (2.21)$$

これらの式にラプラス変換を施すと平均値の微小変動分に対して，次の結果が得られる。

$$\Delta x(s) = (s - A)^{-1} \left[b\Delta v_i(s) + \{(A_1 - A_2)X + (b_1 - b_2)V_i\}\Delta D(s) + \frac{\partial A}{\partial R}X\Delta R(s) \right] \quad (2.22)$$

$$\Delta Y(s) = c\Delta x(s) + (c_1 - c_2)X\Delta D(s) + \frac{\partial c}{\partial R}X\Delta R(s) \quad (2.23)$$

これらの式より，微小変動に対するコンバータの入出力の伝達関数を求めることができる。さらに，レギュレータとして使用する場合の帰還ループを考慮することにより，スイッチングレギュレータの動特性である入出力特性，出力インピーダンス，あるいは安定限界を求めることができる。

2. 2 降圧形コンバータの動特性

2. 2. 1 状態平均化方程式

図 2.2 に示す降圧形コンバータについて、状態平均化方程式を導出する。図中、 r_L , r_C , r_S , r_D は、それぞれリアクトルの損失抵抗、平滑コンデンサの等価直列抵抗、スイッチのオン抵抗、ダイオードの順方向抵抗を表す。図 2.2(b)のスイッチがオンのときの等価回路に対しては、以下の関係式が成り立つ。

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{r_S + r_L + \alpha r_C}{L} i_L - \frac{\alpha}{L} v_C + \frac{1}{L} V_i \quad (2.24)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{\alpha}{C} i_L - \frac{\alpha}{CR} v_C \quad (2.25)$$

$$v_o = \alpha r_C i_L + \alpha v_C \quad (2.26)$$

ただし、

$$\alpha = \frac{R}{R + r_C} \quad (2.27)$$

この関係式より、状態変数を $x = [i_L \ v_C]^T$ とすると、状態方程式と出力方程式は、

$$\frac{d}{dt} x = A_I x + b_I V_i \quad (2.28)$$

$$v_o = c_I x \quad (2.29)$$

と表わされる。

ここで、

$$A_I = \begin{bmatrix} -\frac{r_S + r_L + \alpha r_C}{L} & -\frac{\alpha}{L} \\ \frac{\alpha}{C} & -\frac{\alpha}{CR} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$b_I = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$c_I = [\alpha r_C \ \alpha] \quad (2.32)$$

図 2.2(c)にスイッチがオフのときの等価回路を示す。オフのときの回路はオンの回路において入力電圧 $V_i \rightarrow 0$ [V], 内部抵抗 $r_s \rightarrow r_D$ にしたものと等価であるから, 次のような状態方程式と出力方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt}x = A_2x + b_2V_i \quad (2.33)$$

$$v_o = c_2x \quad (2.34)$$

ここで,

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{r_D + r_L + \alpha r_C}{L} & -\frac{\alpha}{L} \\ \frac{\alpha}{C} & -\frac{\alpha}{CR} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

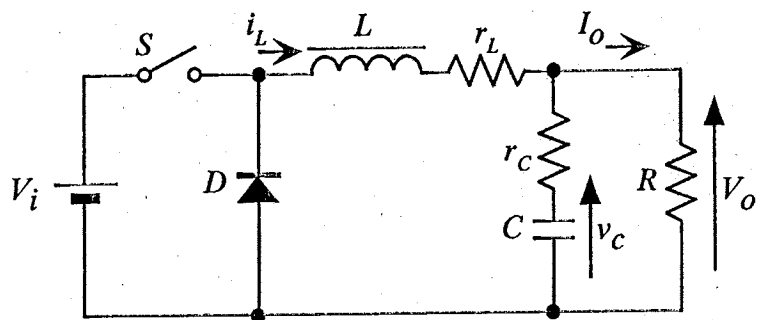
$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$c_2 = c_1 = [\alpha r_C \quad \alpha] \quad (2.37)$$

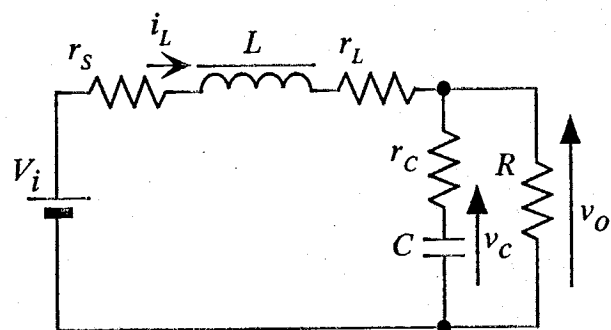
スイッチング周波数に比べて出力フィルタの実効遮断周波数が十分小さいとき, 1 スイッチング周期当たりにおいて, リアクトル電流およびコンデンサ電圧の変化は折れ線で近似でき, 1 スイッチング周期における時比率 D を重みとする 1 スイッチング周期当たりの平均値を変数とする状態平均化法を適用することができる。1 スイッチング周期当たりの平均値 (状態平均化ベクトル) $\bar{x} = [\bar{i}_L \quad \bar{v}_C]^T$ に対して, 次の状態平均化方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\bar{x} = A\bar{x} + bV_i \quad (2.38)$$

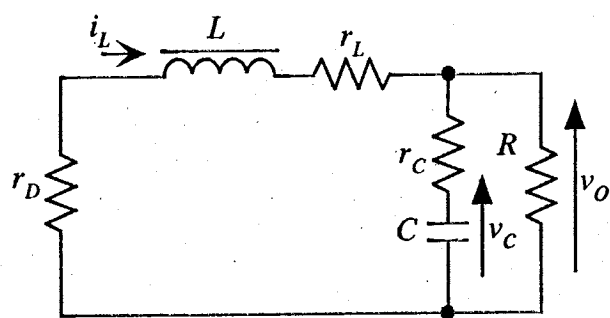
$$v_o = c\bar{x} \quad (2.39)$$



(a) 基本回路



(b) スイッチオン時の等価回路



(c) スイッチオフ時の等価回路

図2.2 降圧形コンバータ

ここで係数行列は,

$$A = DA_1 + D'A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{r}{L} & -\frac{\alpha}{L} \\ \frac{\alpha}{C} & -\frac{\alpha}{CR} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$b = Db_1 + D'b_2 = \begin{bmatrix} \frac{D}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$c = Dc_1 + D'c_2 = [\alpha r_C \quad \alpha] \quad (2.42)$$

ただし,

$$r = Dr_S + D'r_D + r_L + \alpha r_C \quad (2.43)$$

2. 2. 2 小振幅変動時の動特性

(1) 定常状態

定常状態では, $\frac{d\bar{x}}{dt} = 0$ であるから, (2.38)式を解くことにより, 以下の定常値が求まる。

$$X = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} = -A^{-1}bV_i = \frac{D}{\alpha + \frac{r}{R}} \begin{bmatrix} 1/R \\ 1 \end{bmatrix} V_i \quad (2.44)$$

$$V_o = cX = [\alpha r_C \quad \alpha] \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} = \frac{D}{\alpha + \frac{r}{R}} V_i \quad (2.45)$$

(2) 伝達関数

入力電圧, 時比率, 負荷抵抗を低周波微小振動させたとき, コンバータの特性は(2.22)式で表わされる。そこで, (2.44)式で求めた定常値, および以下の計算式

$$(s-A)^{-1} = \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} s + \frac{\alpha}{CR} & -\frac{\alpha}{L} \\ \frac{\alpha}{C} & s + \frac{r}{L} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$P(s) = |s-A| = s^2 + P_1 s + P_2 \quad (2.47)$$

$$P_1 = \frac{r}{L} + \frac{\alpha}{CR} \quad (2.48)$$

$$P_2 = \frac{\alpha^2}{LC} + \frac{r\alpha}{LCR} \quad (2.49)$$

$$A_1 - A_2 = \begin{bmatrix} \frac{r_D - r_S}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$b_1 - b_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial A}{\partial R} = \frac{1}{(R+r_C)^2} \begin{bmatrix} -\frac{r_C^2}{L} & -\frac{r_C}{L} \\ \frac{r_C}{C} & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

より，状態平均化ベクトルの微小変動分は，次のような関係式で表わされる。

$$\begin{aligned} \Delta x(s) &= \begin{bmatrix} \Delta i_L(s) \\ \Delta v_C(s) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} s + \frac{\alpha}{CR} & -\frac{\alpha}{L} \\ \frac{\alpha}{C} & s + \frac{r}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{D}{L} \Delta v_i(s) + \frac{r_D + r_L + R}{L(r + \alpha R)} V_i \Delta D(s) - \frac{Dr_C V_i}{L(R + r_C)(r + \alpha R)} \Delta R(s) \\ \frac{DV_i}{C(R + r_C)(r + \alpha R)} \Delta R(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.53)$$

出力方程式は(2.23)式を基にして，

$$c_1 - c_2 = 0 \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial c}{\partial R} = \frac{r_c}{(R+r_c)^2} [r_c \quad 1] \quad (2.55)$$

より,

$$\Delta v_o(s) = \alpha r_c \Delta i_L(s) + \alpha \Delta v_c(s) + \frac{Dr_c V_i}{(R+r_c)(r+\alpha R)} \Delta R(s) \quad (2.56)$$

と求められる。(2.53)式と(2.56)式より, 各微小変動信号に対する出力電圧の伝達関数は次のように求めることができる。

$$G_{vo}(s) \triangleq \frac{\Delta v_o(s)}{\Delta v_i(s)} = \frac{\alpha r_c D}{L} \frac{1}{P(s)} \left(s + \frac{1}{r_c C} \right) \quad (2.57)$$

$$G_{vd}(s) \triangleq \frac{\Delta v_o(s)}{\Delta D(s)} = \frac{g_1 s + g_2}{P(s)} V_i \quad (2.58)$$

$$G_{vr}(s) \triangleq \frac{\Delta v_o(s)}{\Delta R(s)} = \frac{g_3 s^2 + g_4 s + g_5}{P(s)} V_i \quad (2.59)$$

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \frac{\alpha r_c (r_D + r_L + R)}{L(r + \alpha R)} \\ g_2 &= \frac{\alpha (r_D + r_L + R)}{LC(r + \alpha R)} \\ g_3 &= \frac{D \alpha r_c}{R(r + \alpha R)} \\ g_4 &= \frac{D \alpha \{L + Cr_c(r - \alpha r_c)\}}{RLC(r + \alpha R)} \\ g_5 &= \frac{D \alpha (r - \alpha r_c)}{RLC(r + \alpha R)} \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

(3) レギュレーション特性

これらの伝達特性を持つコンバータに, フィードバック制御を用いてスイッチングレギュレータを構成する。コンバータの出力電圧を基準電

圧と比較し、その誤差電圧に応じてスイッチのオン、オフ期間を制御する PWM 制御により、出力電圧は一定値に保たれる。そのレギュレーション機構を先に求めた伝達関数を用いてブロック図で表わすと図 2.3 のようになる。ここでは、PWM 制御回路を含む帰還ループの伝達関数を $K_v(s)$ としている。時比率の微小変動 $\Delta D(s)$ は、

$$\Delta D(s) = -G_P K_v(s) \Delta v_o(s) \quad (2.61)$$

と表わされる。ここで G_P は PWM のゲイン $[1/V]$ である。出力電圧の微小変動 $\Delta v_o(s)$ は、

$$\Delta v_o(s) = G_{vv}(s) \Delta v_i(s) + G_{vr}(s) \Delta R(s) + G_{vd}(s) \Delta D(s) \quad (2.62)$$

となる。(2.61), (2.62)式より、

$$\Delta v_o(s) = \frac{G_{vv}(s)}{1 + G_P K_v(s) G_{vd}(s)} \Delta v_i(s) + \frac{G_{vr}(s)}{1 + G_P K_v(s) G_{vd}(s)} \Delta R(s) \quad (2.63)$$

とレギュレーション特性の基本式が求められる。

(4) 過渡応答

本研究においては、負荷変動に比べて入力電圧の変動は小さく無視できるものとし、負荷変動に着目して以降の解析を進める。

従って、負荷変動に対する出力電圧の変動は(2.63)式より

$$\Delta v_o(s) = \frac{G_{vr}(s)}{1 + G_P K_v(s) G_{vd}(s)} \Delta R(s) \quad (2.64)$$

と表わされる。フィードバック要素の位相遅れのない増幅器

$$K_v(s) = K_v \quad (2.65)$$

の場合には、

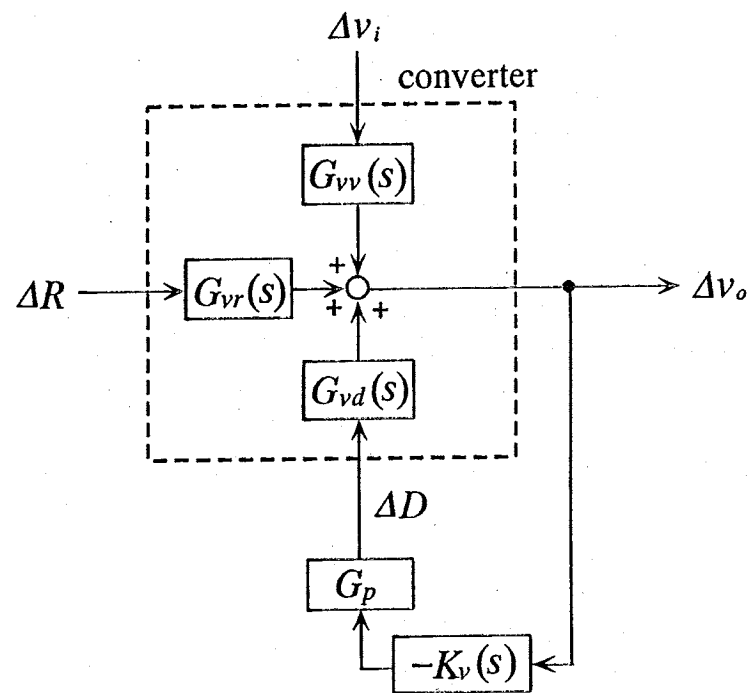


図2.3 PWMコンバータの制御機構

$$\Delta v_o(s) = \frac{(g_3 s^2 + g_4 s + g_5) V_i}{s^2 + (P_1 + G_P K_v g_1 V_i) s + (P_2 + G_P K_v g_2 V_i)} \Delta R(s) \quad (2.66)$$

となる。

負荷の抵抗がステップ状に ΔR 変化した場合，(2.66)式に $\Delta R(s) = \frac{\Delta R}{s}$ を代入し，ラプラス逆変換することにより，出力電圧の過渡応答を次式のように求めることができる。

$$\Delta v_o(t) = a_0 + a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} \quad (2.67)$$

ここで，

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{g_5 V_i}{s_1 s_2} \Delta R \\ a_1 &= \frac{g_3 s_1^2 + g_4 s_1 + g_5}{s_1 (s_1 - s_2)} V_i \Delta R \\ a_2 &= \frac{g_3 s_2^2 + g_4 s_2 + g_5}{s_2 (s_2 - s_1)} V_i \Delta R \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

と表わされる。ただし， s_1, s_2 は，(2.66)式の分母を零とした特性方程式の根である。

また，この特性根 s_1, s_2 の複素平面上での位置を論ずることにより安定性について検討できる。降圧形の場合，2次の特性方程式の係数が正の値であることから，特性根は常に左半平面に存在することになるので安定である。

(5) 出力インピーダンス

スイッチングレギュレータの出力インピーダンスは，

$$Z_o(s) \triangleq -\frac{\Delta v_o(s)}{\Delta i_o(s)} \quad (2.69)$$

と定義される。出力電圧と出力電流の関係式 $V_o = I_o R$ を基に、負荷抵抗の微小変化により電圧、電流が微小変化したとすると

$$\begin{aligned}\Delta v_o(t) &= R \Delta i_o(t) + I_o \Delta R(t) + \Delta R(t) \Delta i_o(t) \\ &\approx R \Delta i_o(t) + I_o \Delta R(t) = R \Delta i_o(t) + \frac{V_o}{R} \Delta R(t)\end{aligned}\quad (2.70)$$

の関係が成り立つ。この式をラプラス変換して、 $\Delta v_o(s)/\Delta i_o(s)$ の項について整理することにより出力インピーダンスを求めることができ、次式のように表わせる。

$$Z_o(s) = \frac{\frac{R^2}{V_o} \frac{\Delta v_o(s)}{\Delta R(s)}}{1 - \frac{R}{V_o} \frac{\Delta v_o(s)}{\Delta R(s)}} = \frac{\frac{R^2}{V_o} G_{vr}(s)}{1 + G_p K_v G_{vd}(s) - \frac{R}{V_o} G_{vr}(s)} \quad (2.71)$$

この式に、先に求めた伝達関数を代入し、 $s = j\omega$ と置くと出力インピーダンスの周波数特性を得ることができる。

$$Z_o(s) = \frac{z_1 + jz_2}{z_3 + jz_4} \quad (2.72)$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= R^2 (g_5 - g_3 \omega^2) V_i \\ z_2 &= \omega g_4 R^2 V_i \\ z_3 &= P_2 V_o + g_2 G_p K_v V_i V_o - g_5 R V_i - \omega^2 (V_o - g_3 R V_i) \\ z_4 &= \omega (P_1 V_o + g_1 G_p K_v V_i V_o - g_4 R V_i) \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

2. 2. 3 負荷変動時の過渡応答

これまでの解析においては、負荷の変動が小さい場合について検討して来た。ここでは、負荷が小信号として扱えない大振幅のステップ変化をした場合について考察する。

(1) 簡易モデルによる検討

負荷がステップ状に大きく変化した場合 [5], [10] の出力電圧の過渡応答

と出力コンデンサの寄生成分およびリアクトル電流との関係について整理する。ここでは、出力コンデンサ C の等価直列抵抗を r_c 、等価直列インダクタンスを L_c とする図 2.4(a)の降圧形のモデルについて検討する。出力電圧の過渡特性を容易に把握するため、負荷電流の有限時間 T_{step} でのステップ変化に対してリアクトル電流はコンバータの制御方法と動特性によって決まる遅れ時間 T_c と応答時間 T_L により図 2.4(b)の波形のように追従するものとする。出力電圧の過渡特性は、負荷電流とリアクトル電流の関係より大きくは2つのフェーズ、すなわち、負荷電流がステップ状に変化している期間（フェーズⅠ）と負荷電流が変化後の一定値になった期間（フェーズⅡ）に分けることができる。フェーズⅡの期間は、さらにリアクトル電流の変化が始まっていない期間（フェーズⅡA）と変化している期間（フェーズⅡB）に分けることができる。

〔フェーズⅠ ($0 \leq t \leq t_1$)〕

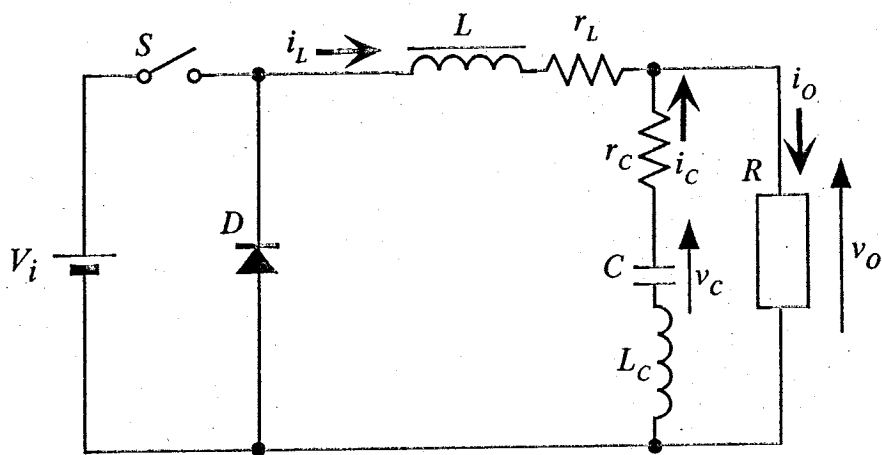
フェーズⅠの期間では、出力電圧の変動 Δv_o は、リアクトルの電流 i_L はまだ応答せず変化していないため、負荷電流 i_o の変化により直接出力コンデンサの寄生成分とコンデンサからの放電による電圧降下で、次式のように表わされる。

$$\Delta v_o(t) = r_c \Delta i_c(t) + L_c \frac{d \Delta i_c(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t \Delta i_c(t) dt \quad (2.74)$$

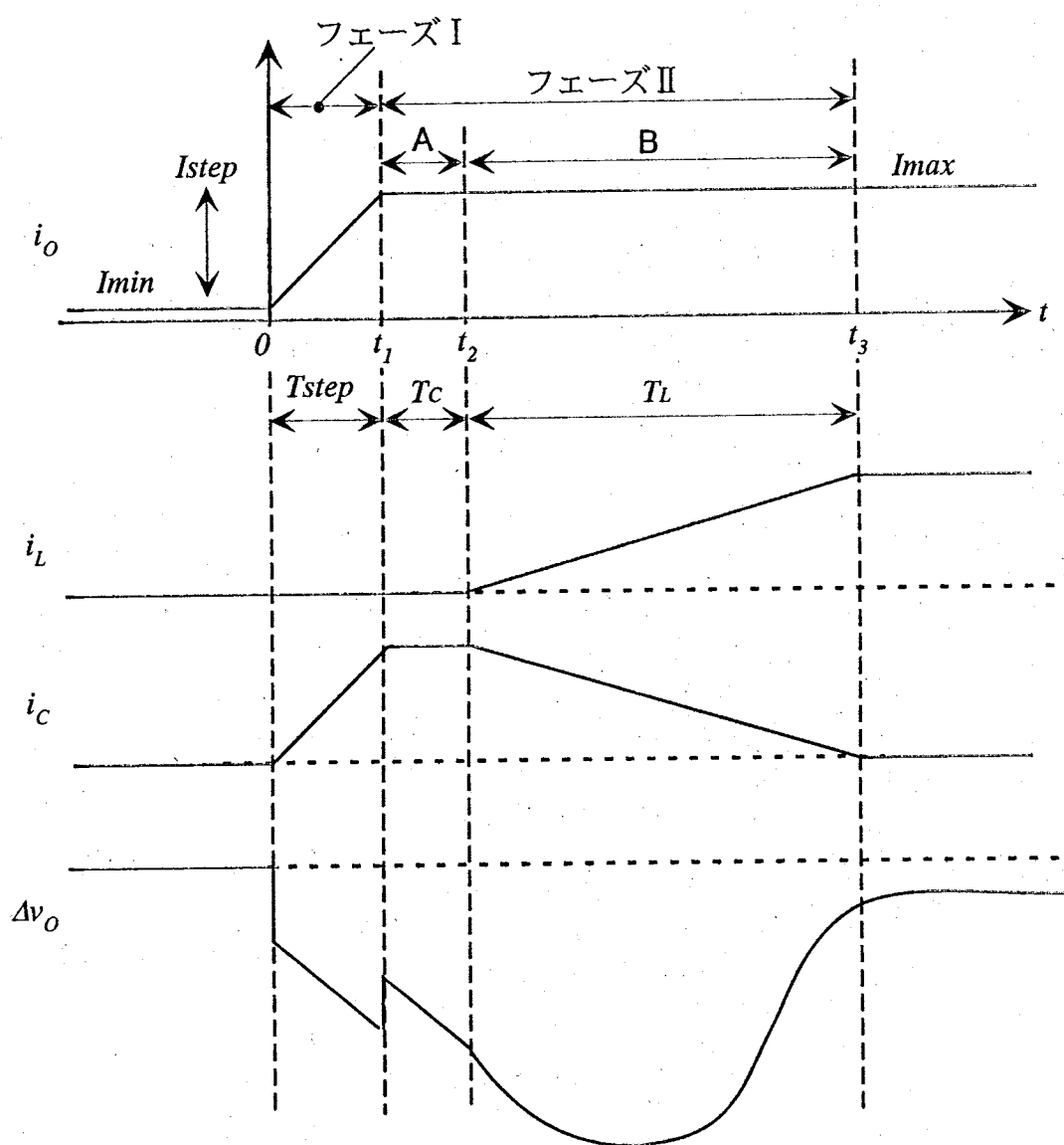
負荷電流の変化分は

$$\Delta i_c(t) = \Delta i_o(t) = \frac{I_{step}}{T_{step}} t \quad (2.75)$$

となるので、(2.74)式は



(a) 基本回路



(b) 電流・電圧波形

図2.4 負荷がステップ状に変化したときの過渡応答モデル

$$\Delta v_o(t) = \frac{I_{step}}{2CT_{step}} t^2 + r_c \frac{I_{step}}{T_{step}} t + L_c \frac{I_{step}}{T_{step}} \quad (2.76)$$

となる。フェーズⅠの最終値は

$$\Delta v_o(T_{step}) = \frac{I_{step} T_{step}}{2C} + r_c I_{step} + L_c \frac{I_{step}}{T_{step}} \quad (2.77)$$

となる。この最終値より、十分に大きな容量の出力コンデンサが使われたとしてもコンデンサの寄生成分 r_c , L_c による電圧降下が残ることが理解できる。負荷電流の変動幅が大きいときには寄生抵抗分が、変化速度が速い場合にはインダクタンス成分が効いている。負荷の変化が大きく急峻な場合には、できる限り寄生成分を小さくすることが重要となる。

〔フェーズⅡA ($t_1 \leq t \leq t_2$)〕

フェーズⅡAの期間では、負荷電流は変化後の一定値に落ち着いているものの、リアクトル電流がまだ応答せず変化していないため、出力電圧の変動 Δv_o は、一定の負荷電流変化分による出力コンデンサからの放電と抵抗分による電圧降下で次式のように表わされる。

$$\Delta v_o(t) = r_c \Delta i_c(t) + \frac{1}{C} \int_{t_1}^t \Delta i_c(t) dt + \frac{I_{step} T_{step}}{2C} \quad (2.78)$$

出力電流の変化量は一定値

$$\Delta i_c(t) = \Delta i_o(t) = I_{step} \quad (2.79)$$

であるので、(2.78)式は

$$\Delta v_o(t) = r_c I_{step} + \frac{I_{step}}{C} (t - t_1) + \frac{I_{step} T_{step}}{2C} \quad (2.80)$$

となる。フェーズⅡAの最終値は

$$\Delta v_o(T_{step} + T_c) = r_c I_{step} + \frac{I_{step} T_c}{C} + \frac{I_{step} T_{step}}{2C} \quad (2.81)$$

となる。本式には、リアクトル電流が応答開始するまでの遅れ時間 T_c に比例する項が含まれる。

[フェーズⅡB ($t_2 \leq t \leq t_3$)]

フェーズⅡB の期間では、スイッチ S が出力電圧のフィードバック制御により決定される時比率で制御され、リアクトルの電流が負荷電流の変動に追従しようとしている状態である。ここでは、PWM 制御により T_L の応答時間でリアクトル電流が負荷電流に追従しようとし、

$$\Delta i_L(t) = \frac{I_{step}}{T_L}(t - t_2) \quad (2.82)$$

となる。出力コンデンサを流れる変位電流は、負荷電流とリアクトル電流の差分であるから

$$\begin{aligned} \Delta i_c(t) &= \Delta \{i_o(t) - i_L(t)\} \\ &= I_{step} - \frac{I_{step}}{T_L}(t - t_2) \end{aligned} \quad (2.83)$$

と表わされる。出力電圧の変動 Δv_o は、出力コンデンサの寄生成分とコンデンサからの放電による電圧降下により

$$\Delta v_o(t) = r_c \Delta i_c(t) + L_c \frac{d\Delta i_c(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_2}^t \Delta i_c(t) dt + \frac{I_{step}}{C} \left(\frac{T_{step}}{2} + T_c \right) \quad (2.84)$$

と表わされるので、この式に(2.83)式を代入するとフェーズⅡBでの出力電圧変動が次式ように求められる。

$$\Delta v_o(t) = I_{step} \left(r_c - \frac{L_c}{T_L} \right) + \frac{I_{step}}{C} \left(\frac{T_{step}}{2} + T_c \right) + I_{step} \left(-\frac{r_c}{T_L} + \frac{1}{C} \right) (t - t_2) - \frac{I_{step}}{2CT_L} (t - t_2)^2 \quad (2.85)$$

また、フェーズⅡBの最終値は

$$\Delta v_o(T_{step} + T_c + T_L) = I_{step} \left(\frac{T_{step}}{2C} + \frac{T_c}{C} + \frac{T_L}{2C} - \frac{L_c}{T_L} \right) \quad (2.86)$$

となる。本式には、リアクトル電流が応答開始するまでの遅れ時間 T_c 及び変化している時間 T_L に比例する項が含まれる。なお、リアクトル電流の応答時間 T_L は、時比率 D の最大値 100% が PWM 制御の限界値であるから、

$$T_L \geq \frac{L}{V_{IN} - V_{OUT}} I_{step} \quad (2.87)$$

の関係式が成立している。

このモデルで考察したように、出力電圧の過渡応答は、負荷電流変化時のフェーズⅠでは、出力コンデンサの寄生成分に大きく依存し、負荷電流が一定値になったフェーズⅡでは、リアクトル電流の応答開始するまでの遅れ時間 T_c と応答時間 T_L で表わされるレギュレータの系の応答特性、つまりコンバータの制御方法と動特性とに大きく依存している。従って、過渡応答を改善するには、フェーズⅠにおいては出力コンデンサなどによる寄生成分を抑えることが必要であり、フェーズⅡにおいては、レギュレータの応答特性を改善することが重要となる。

(2) 状態平均化モデルによる検討

負荷変動が小さいときは、時比率は(2.61)式のような関係にあり、特に帰還ループに位相遅れがない場合、出力電圧の変動 Δv_o に比例している。この場合には、先述の解析方法により過渡応答を求めることができる。しかし負荷変動が急激な場合、時比率は最大値あるいは最小値に達し、出力電圧に対して図 2.5 に示すような非線形の飽和特性を持つことになる。このような場合には小信号の線形範囲の解析では対応できず、時比率の飽和現象も考慮して状態方程式を立てる必要がある[41]。

負荷電流がスイッチのスイッチング周期に比べて十分速くステップ状に変化した場合には、図 2.2 の降圧形コンバータについて負荷の変動に

対する状態平均化方程式を次のようにして導出することができる。ここでは, 図 2.5 の時比率と出力電圧の変化の関係に対して表 2.1 に示す 3 つのモードに分けて状態平均化方程式を導く。計算の容易化のため, 時比率を決める出力電圧を状態変数とし, 状態ベクトル $x = [i_L \ v_o]^T$ とする。各モードにおける状態平均化方程式は,

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = A_j \bar{x}(t) + b_j V_i \quad (2.88)$$

の形で表わされる。係数行列の添字 j が各モードを示している。

$r_C \ll R$, $r_S + r_L \approx r_D + r_L \rightarrow r_L$ とすると, 各モードでの係数行列は

[モード 1]

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} - \frac{r_L r_C}{L} & -\frac{1}{CR} - \frac{r_C}{L} \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} \frac{D_m}{L} \\ \frac{r_C D_m}{L} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

[モード 2]

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1 + KV_i}{L} \\ \frac{1}{C} - \frac{r_L r_C}{L} & -\frac{1}{CR} - \frac{r_C (1 + KV_i)}{L} \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} \frac{KV_u}{L} \\ \frac{r_C KV_u}{L} \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

[モード 3]

$$A_3 = A_1, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

となる。

定常状態では, モード 2 であるから, その定常値

$$\bar{X} = -A_2^{-1} b_2 V_i \quad (2.92)$$

より,

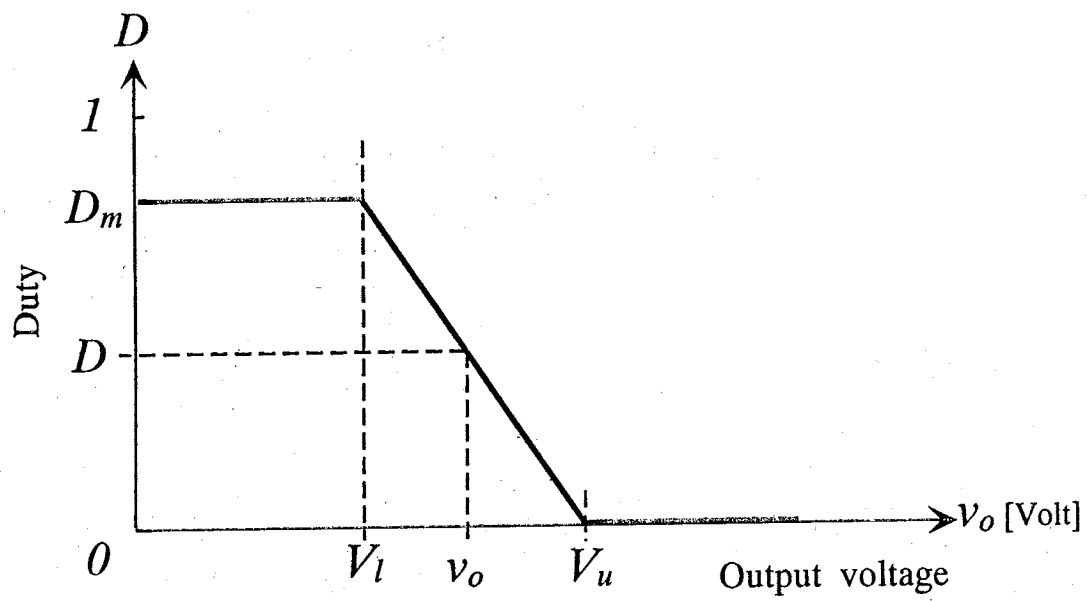


図2.5 出力電圧に対する時比率

表2.1 動作モード

動作モード	出力電圧 v_o	時比率 D
1	$v_o < V_l$	D_m
2	$V_l \leq v_o \leq V_u$	$D = -K(v_o - V_u)$
3	$V_u < v_o$	0

$$\left(\text{帰還定数} : K = \frac{D_m}{V_u - V_l} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} I_L &= \frac{KV_i V_u}{R(1 + KV_i + r_L/R)} \\ V_o &= RI_L \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

負荷抵抗 $R=R_0$ の定常状態から R_1 へステップ変化した場合の変動分 $\Delta x = [\Delta i_L \quad \Delta v_o]^T$ に対する状態平均化方程式を考える。このとき状態ベクトルの定常状態である初期値を X_0 と抵抗が R_1 へ変わる変化分を Δx_{01} とし、

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= [I_L \quad V_o]^T \\ \Delta x_{01} &= [\Delta i_L \quad \Delta v_o]^T \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

とすると、モード 2 における負荷抵抗が R_1 へステップ変化した後の状態平均化方程式は、

$$\frac{d}{dt}(\bar{x}_0 + \Delta x_{01}) = A_{2-1}(\bar{x}_0 + \Delta x_{01}) + b_2 V_i \quad (2.95)$$

と表わされる。このとき A_{2-1} はモード 2 の係数行列で負荷抵抗が $R=R_1$ の場合であり、

$$\begin{aligned} A_{2-1} &= A_{2-0} + \Delta A_{2-01} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1+KV_i}{L} \\ \frac{1}{C} - \frac{r_L r_C}{L} & -\frac{1}{CR_1} - \frac{r_C(1+KV_i)}{L} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\Delta A_{2-01} = A_{2-1} - A_{2-0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

となる。

(2.95)式は、 $R=R_0$ の定常状態の $\frac{d}{dt}\bar{x}_0 = A_{2-0}\bar{x}_0 + b_2 V_i = 0$ より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta x_{01} &= (A_{2-0} + \Delta A_{2-01})\Delta x_{01} + \Delta A_{2-01}\bar{x}_0 \\ &= A_{2-1}\Delta x_{01} + \Delta A_{2-01}\bar{x}_0\end{aligned}\quad (2.98)$$

となる。

同様にして、モード 1, 3 についても負荷抵抗 $R=R_0$ の定常状態から R_l へステップ変化した場合の変動分 $\Delta x = [\Delta i_L \quad \Delta v_o]^T$ に対する状態平均化方程式が以下のように得られる。

[モード 1]

$$\frac{d}{dt}\Delta x_{01} = A_{1-1}(\Delta x_{01} + \bar{x}_0) + b_1 V_i \quad (2.99)$$

[モード 2]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta x_{01} &= A_{2-1}\Delta x_{01} + \Delta A_{2-01}\bar{x}_0 \\ &= A_{2-1}\Delta x_{01} + b'_2 V_o\end{aligned}\quad (2.100)$$

ここで、(2.100)式は(2.98)式との関係

$$b'_2 V_o = \Delta A_{2-01}\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_l}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_l}\right) \end{bmatrix} V_o$$

より、

$$b'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_l}\right) \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

である。

[モード 3]

$$\frac{d}{dt}\Delta x_{01} = A_{3-1}(\Delta x_{01} + \bar{x}_0) \quad (2.102)$$

これらの状態方程式を解くことにより出力電圧の変動 Δv_o が求まり、負荷抵抗がステップ変化したときの出力の過渡応答波形が得られる。例えば、負荷が軽負荷から重負荷にステップ変化する場合には、モード 2 の時比率の飽和していない軽負荷時の定常状態から始まり、時比率が最大値 D_m で飽和しモード 1 の状態で出力変動し、時比率の飽和からぬけるとモード 2 の線形範囲で変動し、条件によっては時比率が最小値側で飽和しモード 1 に入り、その後またモード 2 にもどり、出力電圧が定常値に近づくという動きをする。モードごとの初期条件をもとめて、各モードでの境界条件を連続として出力電圧の解析値が得られる。

負荷の変化速度がスイッチング速度に比較して遅い場合には、上記のステップ変化の解析は適応できず、状態平均化方程式を基にした数値計算により過渡応答を求めることが有効である。その手順を、図 2.6 に示す。負荷抵抗が一定値ではなく、時間の関数になっているため、時間ごとに状態平均化方程式(2.90)の係数行列を計算し直し、方程式を数値計算(ルンゲ・クッタ法)により解き、微小時間後の状態ベクトルを求めている。その際、時比率の非線形の関係式を考慮して計算を行う必要がある。

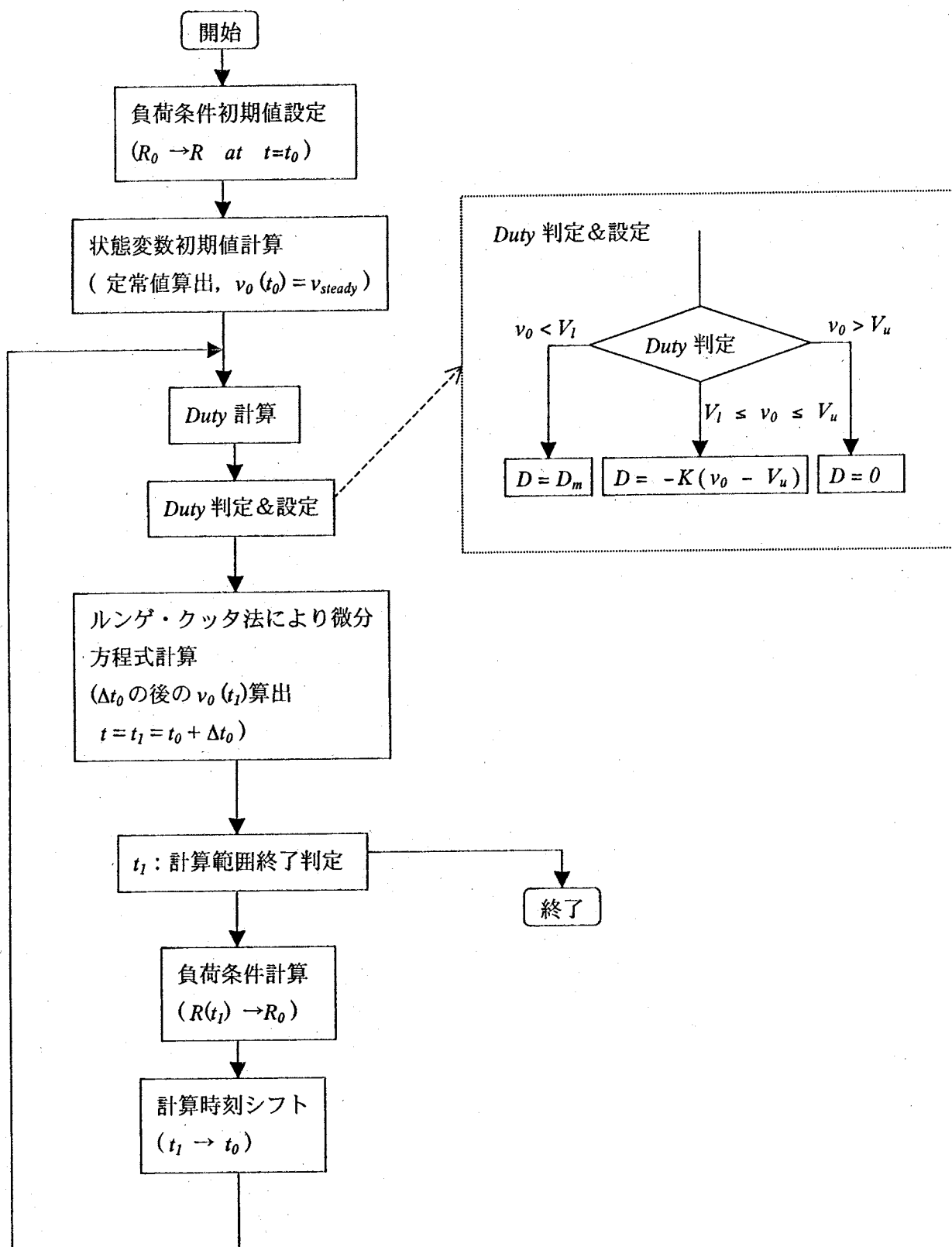


図 2.6 負荷がステップ状に変化したときの数値計算手順