資本回転の均衡分析（4）

守　　　　　健　　　二

5．結合生産における単純再生産

5.1. モ デ ル

5.1.1. 与件

・財のインデックス：$i=1,\cdots,m$

・部門のインデックス：$j=1,\cdots,n$

・部門jにおける財iの投入係数：$a_{ij}\in\mathbb{R}_+$

・投入係数行列：$A:=(a_{ij})\in M(m\times n,\ \mathbb{R}_+)$

・部門jにおける労働投入係数：$l_j\in\mathbb{R}_+$

・労働投入係数（行）ベクトル：$L:=(l_1,\cdots,l_n)\in\mathbb{R}^n_+$

・部門jにおける財iの産出係数：$b_{ij}\in\mathbb{R}_+$

・産出係数行列：$B:=(b_{ij})\in M(m\times n,\ \mathbb{R}_+)$

・実質賃金率：$\Omega\in\mathbb{R}_+$

・部門jにおける投入財iの価値回転数：$U_{ij}\in\mathbb{R}_{++}$

・部門jにおける賃金（可変資本）の価値回転数：$U_{lj}\in\mathbb{R}_{++}$

すでに第Ⅲ章4.2.1節で補足説明したように，資本循環の有時間性の仮定（第Ⅱ章（3.4）式）及び価値回転の公式（第Ⅱ章（4.15）式）より，（4.15）式の分母は常に正数となり，$U_{ij}>0$である。

なお任意の投入財iについて，その価格がゼロである（$p_i=0$）とき本来の価値回転は定義できない。しかしその投入財の現物更新（$P\cdots P$）のラグに基づいて現物タームでフロー量，ストック量を計算し，そこから「価値回転数」を求めることはできる。現物更新の速度は価格には依存しないと考えられるので，$p_i=0$のとき現物タームの「価値回転数」は，$p_i>0$のときと等しくU_{ij}となる。

5.1.2. 変数

・部門jの操業度：$x_j\in\mathbb{R}_+$

・操業（列）ベクトル：$x' := (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$

・正規化された操業（列）ベクトル：$z = (z_1, \cdots, z_n) := \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j}(x_1, \cdots, x_n) \in Z$

ただし$Z := \{z \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{j=1}^{n} z_j = 1\}$

・財 i の価格：$p_i \in \mathbb{R}_+$

・価格（行）ベクトル：$p := (p_1, \cdots, p_m) \in \mathbb{R}^m_+$

・正規化された価格（行）ベクトル：$y = (y_1, \cdots, y_m) := \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i}(p_1, \cdots, p_m) \in Y$

ただし $Y := \{y \in \mathbb{R}^m_+ \mid \sum_{i=1}^{m} y_i = 1\}$

・貨幣賃金率：$w := \Omega \sum_{i=1}^{m} p_i \in \mathbb{R}_+$

・一般的利潤率：$r \in \mathbb{R}_+$

・部門 j における投入財 i のマークアップ率：$q_{ij} \in \mathbb{R}_+$

・部門 j における賃金のマークアップ率：$q_{lj} \in \mathbb{R}_+$

ここで利潤率の恒等式から $q_{ij} = r/U_{ij}$ が成り立つことを考慮する。

・マークアップ行列：$\Delta A(r) := (q_{ij} a_{ij}) = (\dfrac{r}{U_{ij}} a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R}_+)$

・マークアップ付投入係数行列：

$$\widetilde{A}(r) := A + \Delta A(r) = ((1 + q_{ij}) a_{ij}) = ((1 + \frac{r}{U_{ij}}) a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R}_+)$$

・マークアップ（行）ベクトル：$\Delta L(r) := (\dfrac{r}{U_{l1}} l_1, \cdots, \dfrac{r}{U_{ln}} l_n) \in \mathbb{R}^n_+$

・マークアップ付労働投入係数ベクトル：

$$\widetilde{L}(r):=L+\Delta L(r)=((1+\frac{r}{U_{l1}})\,l_1,\ \cdots,\ (1+\frac{r}{U_{ln}})\,l_n)\in\mathbb{R}^n_+$$

・労働者階級の消費需要ベクトル：$d\in\mathbb{R}^m_+$

・資本家階級の消費需要ベクトル：$e\in\mathbb{R}^m_+$

5.2. 均衡条件

5.2.1. 均衡条件

1）$pB\leqq p\widetilde{A}(r)+w\widetilde{L}(r)$

2）$Bx\geqq Ax+d+e$

3）$pBx=p\widetilde{A}(r)x+w\widetilde{L}(r)x$

4）$pBx=pAx+pd+pe$

5）$pBx>0$

6）$p\geq 0$

7）$x\geq 0$

8）$r>0$

5.2.2. 均衡条件の解釈

1）の均衡条件について。これは任意の部門jにおいて

$$p_1b_{1j}+\cdots+p_mb_{mj}\leqq(1+\frac{r}{U_{1j}})p_1a_{1j}+\cdots+(1+\frac{r}{U_{mj}})p_ma_{mj}+(1+\frac{r}{U_{lj}})wl_j \quad \cdots\cdots(5.1)$$

が成り立つことを意味する。左辺は部門jの総生産物の価格であり，右辺は，一般的利潤率rを保証するマークアップを投入財ごとに費用価格に付加した価格である。即ち一般的利潤率rに対応した部門jの総生産物の生産価格である。

さらに3）の条件と合わせて考えると，n個の部門の中に（5.1）式が等式で成り立つ部門がある。つまりこの部門では総生産物の価格が，一般的利潤率rを保証する生産価格と一致している。それ以外の部門では総生産物の価格が，rを保証する生産価格に達していない。言い換えれば，それぞれの部門は一般的利潤率rを獲得しているか，さもなくばそれ以下の利潤率に甘んじているかのどちらかである。したがって1）は，ある価格体系pのもとで得られる最大の一般的利潤率rを表現する式である。

また1）の両辺を$\sum_{i=1}^{m} p_i$で割ると次の式が得られる。

1)' $yB \leqq y\widetilde{A}(r) + \Omega\widetilde{L}(r)$

2）の均衡条件について。これは任意の財iにおいて

$$x_1 b_{i1} + \cdots + x_n b_{in} \geqq x_1 a_{i1} + \cdots + x_n a_{in} + d_i + e_i \qquad \cdots\cdots(5.2)$$

が成り立つことを意味する。左辺は任意の時点tにおいて社会全体で完成された財iの産出数量を表す。右辺はその産出された財iにたいして時点t以降に発生する社会の需要の総計である。

財iにたいする社会の需要は次の3つの部分からなる。

①生産規模（操業水準x）の維持を保証する需要（$x_1 a_{i1} + \cdots + x_n a_{in}$）

②労働者階級の消費需要（d_i）

③資本家階級の消費需要（e_i）

2）の不等式の含意は第1に，財iに対する社会の需要がそれ以前に社会において生産された財iの産出数量を超えないということである。財iは任意に選んだのだから，すべての財について，体系の中で需要される数量は，それ以前にこの体系自身の中で生産された数量を超えることはない。

2）式の第2の含意として，4）の条件と合わせて考えると，m種類の財の中に，（5.2）式が等号で成り立つ財が存在する。つまりこの財については，すでにその産出数量（供給）が社会の需要と一致しているが，他の財では産出数

量がまだ需要を上回っており，供給に余裕があるということである。言い換えれば，他の財ではまだ余裕があっても，ある財では精々生産規模の維持を保証するだけの供給しか存在しない。したがって2）は，ある操業水準 x のもとで単純再生産が確実に達成できることを表現している。

2.2.1節における収入の源泉にかんする仮定により，賃金は再生産のための労働の雇用（労働力の購買）と同時に支払われる。従って労働者階級に支払われる賃金は，労働に対する新たな需要

$$Lx = x_1 l_1 + \cdots + x_n l_n$$

に応じて支払われ，その総額は

$$wLx$$

となる。この賃金は全額，労働者階級の収入として消費支出される。したがって労働者階級の収入の総額 D は

$$D = wLx = \Omega Lx \sum_{i=1}^{m} p_i$$

となる。この収入によって発生する労働者階級の消費需要は

$$d = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} Df(y) = \Omega Lxf(y) \quad \text{ただし } yf(y) = 1 \qquad \cdots\cdots(5.3)$$

となる。

同じく収入の源泉に関する仮定により，利潤は，生産物の販売によって価格が実現されたあとに取得される。つまり時点 t において完成した生産物の価格 pBx に含まれる利潤は

$$pBx - (pAx + wLx)$$

であるが，この利潤は生産物の販売後に資本家階級によって取得される。単純再生産では蓄積率 s はゼロであり，個人消費率 c が1であるから，この利潤の全額が資本家階級の収入として消費支出される。したがって資本家階級の収入

の総額Eは

$$E=pBx-(pAx+wLx)$$
$$=p\widetilde{A}(r)x+w\widetilde{L}(r)x-pAx-wLx$$
$$=(y\Delta A(r)+\Omega\Delta L(r))x\sum_{i=1}^{m}p_i$$

となる。この収入によって発生する資本家階級の消費需要は

$$e=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}p_i}E\phi(y)=(y\Delta A(r)+\Omega\Delta L(r))x\phi(y) \quad ただし\ y\phi(y)=1 \quad \cdots(5.4)$$

となる。

ここでxを正規化し，3）の条件および（5.3)(5.4）式をつかって2）を書き換えれば次の式が得られる。

2)' $Bz\geqq\{A+\Omega f(y)L+\phi(y)(y\Delta A(r)+\Omega\Delta L(r))\}z$

3）の均衡条件について。任意の部門jについて（5.1）式が厳密な不等号で成立するときは，部門jは一般的利潤率rを達成できない。従って資本家は部門jから撤退し，一般的利潤率rが得られる他の部門へと移動する。よって部門jの操業度x_jはゼロとなる。こうした部門操業の条件を「収益性のルール」といい，3）は1）と合わせてこのルールを定式化したものである。

また3）の両辺を$\sum_{i=1}^{m}p_i\sum_{j=1}^{n}x_j$で割ると次の式が得られる。

3)' $yBz=y\widetilde{A}(r)z+\Omega\widetilde{L}(r)z$

4）の均衡条件について。任意の財iについて（5.2）式が厳密な不等号で成立するときは，財iにおいて供給過剰が発生している。その場合財iは自由財となり，その価格p_iはゼロに設定される。こうした価格設定の規則を「自由財のルール」といい，4）は2）と合わせてこのルールを定式化したものである。また2)'を考慮しながら，x，pを正規化すると次の式が得られる。

4)' $yBz = yAz + \Omega Lz + (y\Delta A(r) + \Omega\Delta L(r))z$

5）の均衡条件について。これは社会の総生産物の価格がゼロにはならないというきわめて自然な条件である。これも x, p を正規化して次のように書き換えられる。

5)' $yBz > 0$

これは，社会全体で生産される総生産物の価格は正になるということを意味する。

6）の均衡条件について。これは，価格ベクトルが半正であること，すなわち少なくとも一つの財について価格が正であることを意味する。これも同様に p を正規化して次のように書き換えられる。

6)' $y \geq 0$

7）の均衡条件について。これは，操業ベクトルが半正であること，すなわち少なくとも一つの部門は正の操業度をもって操業されることを意味する。これも同様に x を正規化して次のように書き換えられる。

7)' $z \geq 0$

8）の均衡条件について。これは，一般的利潤率が正であることを意味する。

これらの条件のうち1)' 2)' 3)' 4)' 6)' 7)' をみたす y および z が存在すれば，それぞれ利潤率均等化（1.2.1節）を満たす均衡価格体系であり，成長率均等化（1.2.2節）を満たす均衡操業水準である。さらに8）は一般的利潤率が正であり，資本家の個人的消費が行われるための必要十分条件である。5）は均衡が経済的に有意な状態であることを保証するための追加的な条件である。よって1)'～7)' 8）の８条件をすべて同時にみたす y, z, r が存在すれば，それは単純再生産における一般均衡の存在の十分条件である。

5.2.3. 均衡条件の相互関連

なお6)' 7)' については y および z が，成分和が１となるように正規化した

価格ベクトルないし操業度ベクトルであると前提しているから，両条件ともすでに満たされている。またマークアップ付投入係数行列$\widetilde{A}(r)$の定義から3)’と4)’が同値であることは明らかである。このことから，さらに6)’ 7)’を考慮すれば，3)’または4)’が，1)’および2)’から容易に導ける。よって8つの均衡条件のうち3)’ 4)’ 6)’ 7)’を，重複する余分な条件として削除することが許される。残るのは従って1)’ 2)’ 5)’ 8）の4つの条件である。

5.3. 均衡の存在

5.3.1. 仮定

①投入係数行列Aの各列は少なくとも一つの正の成分を含む。これはいわゆる「桃源郷の不可能性」の仮定であり，無からは何も生まれないというきわめて自然な仮定である。

②産出係数行列Bの各行は少なくとも一つの正の成分を含む。これはどの財も必ずどれかの部門で生産されるという自然な仮定である。

③ $\forall_{y\in Y} \exists_{z\in Z} \; Bz-(A+\Omega f(y)L)z>0$ ……(5.5)

ここでは「拡張された投入係数行列」に注目する。すなわち雇用された労働者の消費需要を含めた投入係数行列$A+\Omega f(y)L$のことである。ある操業水準を適切に選べば，社会はすべての財に関して，その「拡張された」投入量を超えた産出量を生産することができる。このように社会はどんな価格体系のもとでも，すべての財に関して剰余を生み出すことができるという仮定を措くのである。この仮定は，単一生産における「拡張された投入係数行列」の生産性に相当するものである（4.4.1節参照）[1]。これは$r>0$を保証し，資本家の個人

1）フォン・ノイマン体系における「生産性」の定義については以下の文献でも導入されている。Fujimori, Y. [1982], *Modern Analysis of Value Theory*, Berlin, Springer-Verlag, p.47. Duménil, G./Lévy, D. [1984], The Unifying Formalism of Domination: Value, Price, Distribution and Growth in Joint Production, *Zeitschrift für Nationalökonomie* (*Journal of*

的消費を確保するために要請される仮定である。

④すべての部門において労働が投入される。すなわち $L>0$ である。

⑤実質賃金率 Ω について $\Omega>0$ である。

5.3.2. 命題

上記の仮定のもとで均衡条件1)' 2)' 5)' 8) を同時に満たす y, z, r が存在する。

5.3.3. 需要行列の定義

上の命題について5.3.3-5.3.17節にわたって証明を行う。まず需要行列 $M(y,r)$ を次のように定義する。

$M(y,r) \in M(m \times n, \mathbb{R}_+)$

$$M(y,r):=A+\Omega f(y)L+\phi(y)(y\Delta A(r)+\Omega\Delta L(r)) \qquad \cdots\cdots(5.6)$$

この行列 $M(y,r)$ の i 行 j 列の成分 $m_{ij}(y,r)$ は従って次のようになる。

$$m_{ij}(y,r):=a_{ij}+\Omega f_i(y)l_j+\phi_i(y)\left(\sum_{h=1}^{m} y_h \frac{r}{U_{hj}} a_{hj}+\Omega\frac{r}{U_{lj}} l_j\right) \qquad \cdots\cdots(5.7)$$

A, ΔA は非負行列, L, ΔL, $f(y)$, $\phi(y)$, Ω はすべて非負であるから, $M(y,r)$ もまた任意の y, r について非負行列である。

5.3.4. 集合 H の定義

ここで集合 H を次のように定義する。

$$H:=\{r\in\mathbb{R}_+ \mid (B-M(y,r))z\geqq 0 \text{ となる } y\in Y \text{ および } z\in Z \text{ が存在する}\}$$
$$=\{r\in\mathbb{R}_+ \mid \exists_{y\in Y}\ \exists_{z\in Z}\ (B-M(y,r))z\geqq 0\}$$

Economics) 44/5, p.358. Duménil, G./Lévy, D. [1988], Linear Joint Production Models: Prelude to a Reassessment of the Classical Legacy (Value, Equilibrium, and Disequilibrium), *Political Economy* 4/2, p.187.

5.3.5. $\underset{r>0}{\exists}\ \underset{y\in Y}{\forall}\ \underset{z\in Z}{\exists}\ (B-M(y,r))z\geqq 0$ の証明

$r=0$ のとき

$$M(y,r)=M(y,0)=A+\Omega f(y)L$$

となるが，このとき仮定③より任意の $y\in Y$ について

$$Bz-M(y,0)z=Bz-(A+\Omega f(y)L)z>0$$

を成り立たせるような $z\in Z$ が存在する。ここでの問題はこのような r がゼロ以外に，しかも正の領域で存在するかどうかである。

そこでまずそのような r は存在しないと仮定してみる。すなわち

$$\underset{r>0}{\forall}\ \underset{y\in Y}{\exists}\ \underset{z\in Z}{\forall}\ (B-M(y,r))z\ngeqq 0$$

と仮定してみる。正の実数からなり 0 に収束する任意の数列 $\{r_k\}$ をとる。すなわち

$$r_k>0,\ k=1,2,\cdots,\ \lim_{k\to\infty} r_k=0$$

である。この数列 $\{r_k\}$ に対応した Y の点列 $\{y_k\}$ を次のように選ぶことができる。すなわち任意の k について，どんな $z\in Z$ をとっても $(B-M(y_k,r_k))z$ の成分のうち少なくとも一つが負になるというものである。また Y はコンパクトだから点列 $\{y_k\}$ は収束する部分列を含み，その極限値 y_0 は Y に属する。この収束する部分列を改めて $\{y_k\}$ と書けば

$$\lim_{k\to\infty} y_k=y_0\in Y$$

となる。この部分列 $\{y_k\}$ の新たなインデックスに対応した $\{r_k\}$ の部分列も改めて $\{r_k\}$ と書いておく。

ここで集合 $\mathcal{S}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{S}:=\{\sigma'=(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)\in\mathbb{R}^m \mid \underset{i=1,\cdots,m}{\exists}\ \sigma_i\leqq 0\}$$

これはもちろん $\mathbb{R}^m_{++}$ の補集合であり，したがって閉集合である。$z\in Z$ を任

意に選ぶ。$\mathcal{S}$ の定義に従えばすべての k について

$$(B-M(y_k,r_k))z\in \mathcal{S}$$

となる。したがって $(B-M(y_k,r_k))z$ と $\mathcal{S}$ との距離はゼロである。すなわち

$$d(\mathcal{S},(B-M(y_k,r_k))z)=0,\ k=1,2,\cdots$$

が成り立つ。(5.7) から明らかなように $m_{ij}(y,r)$ は連続関数であり，

$d:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}_+,\ \sigma\mapsto d(\mathcal{S},\sigma)$ も σ について連続だから

$$\begin{aligned}0&=\lim_{k\to\infty} d(\mathcal{S},(B-M(y_k,r_k))z)\\&=d(\mathcal{S},(B-M(y_0,0))z)\\&=d(\mathcal{S},(B-A-\Omega f(y_0)L)z)\end{aligned}$$

が成り立つ。これにより，$\mathcal{S}$ は閉集合だから

$$(B-A-\Omega f(y_0)L)z\in \mathcal{S}$$

となり，$(B-A-\Omega f(y_0)L)z$ の成分の中には少なくとも一つ非正のものが含まれている。$z\in Z$ は任意に選ばれたのだから，どんな z についても $(B-A-\Omega f(y_0)L)z$ は正にはならない。$y_0\in Y$ であるから，この結論は仮定③に矛盾する。もちろんこの矛盾は

$\forall_{r>0}\ \exists_{y\in Y}\ \forall_{z\in Z}\ (B-M(y,r))z\ngeqq 0$ を仮定したことから生じたのだから

$$\exists_{r>0}\ \forall_{y\in Y}\ \exists_{z\in Z}\ (B-M(y,r))z\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(5.8)$$

でなければならない。よってすべての $y\in Y$ に共通な r_1 を次のように選ぶことができる。

$$\forall_{y\in Y}\ \exists_{z\in Z}\ (B-M(y,r_1))z\geqq 0,\ r_1>0 \qquad \cdots\cdots(5.9)$$

もちろん

$$r_1\in H$$

である。

5.3.6. 主張「Hは上に有界である」の証明

いま次のような定義を導入する。

$$b^* := \max_{j=1,\cdots,n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} \qquad \cdots\cdots(5.10)$$

$$m_*(y,r) := \min_{j=1,\cdots,n} \sum_{i=1}^{m} m_{ij}(y,r) \qquad \cdots\cdots(5.11)$$

$$\phi_* := \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \phi_i(y) \qquad \cdots\cdots(5.12)$$

$$\bar{l}_* := \min_{j=1,\cdots,n} \frac{l_j}{U_{lj}} \qquad \cdots\cdots(5.13)$$

ここでϕ_*は，定義域Yにおけるベクトル$\phi(y)$の成分和の最小値であり，Yがコンパクトであることと$\phi(y)$が連続であることからその存在は保証されている。また$\bar{l}_*$はベクトル$\left(\frac{l_1}{U_{l1}},\cdots,\frac{l_n}{U_{ln}}\right)$の最小の成分であり，定数である。$b^*$は産出係数行列$B$の列和の最大値，$m_*(y,r)$は需要行列$M(y,r)$の列和の最小値である。(5.6) 式における$A$，$\Delta A$，$L$，$\Delta L$，$f(y)$，$\phi(y)$，$\Omega$はすべて非負であるから，すべての$y \in Y$，$r \geqq 0$について

$$M(y,r) \geqq \Omega\phi(y)\Delta L(r)$$

が成り立っている。よって

$$m_*(y,r) \geqq \Omega\phi_*\bar{l}_* r \qquad \cdots\cdots(5.14)$$

となる。これもまたyまたはrとは無関係に常に成り立つ。

任意に$r \in H$を選ぶ。Hの定義よりこのrに対して，$(B-M(y,r))z \geqq 0$となる$y \in Y$および$z \in Z$が存在する。このようなr，y，zについて，成分ごとに書けば

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}z_j - \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(y,r)z_j \geqq 0,\ \ i=1,\cdots,m$$

が成り立っている。これをすべての i について加えると

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}z_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(y,r)z_j \geqq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{i=1}^{m} b_{ij} - \sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{i=1}^{m} m_{ij}(y,r) \geqq 0$$

となる。(5.10)(5.11)(5.12)(5.13)(5.14) 式より，任意の $j=1,\cdots,n$ について

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} \leqq b^*,\ \ \sum_{i=1}^{m} m_{ij}(y,r) \geqq m_*(y,r) \geqq \Omega\phi_*\bar{l}_*r$$

となっているから，$\sum_{j=1}^{n} z_j=1$ を考慮すれば

$$0 \leqq \sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{i=1}^{m} b_{ij} - \sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{i=1}^{m} m_{ij}(y,r)$$

$$\leqq b^* \sum_{j=1}^{n} z_j - \Omega\phi_*\bar{l}_*r \sum_{j=1}^{n} z_j$$

$$= b^* - \Omega\phi_*\bar{l}_*r$$

すなわち

$$b^* \geqq \Omega\phi_*\bar{l}_*r \qquad \cdots\cdots(5.15)$$

が得られる。とくにこの関係は y または z の選び方に無関係に成り立っている。$r \in H$ は任意に選んだのだから，

$$H \subset \{r \in \mathbb{R}_+ \mid b^* \geqq \Omega\phi_*\bar{l}_*r\} \qquad \cdots\cdots(5.16)$$

が成り立つ。

仮定④より $\bar{l}_*>0$ であり，仮定⑤より $\Omega>0$ である。また Y はコンパクトだから $\phi_* = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(y_0)$ となる $y_0 \in Y$ が存在する。この y_0 について $y_0\phi(y_0)=1$

が成り立つのだから，$\phi(y_0)\neq 0$ である。よって $\phi_*>0$ でなければならない。そこで十分大きな r を選べば，

$$b^*<\Omega\phi_*\bar{l}_*r$$

とすることができる。このような r の一つを選んで r_2 とすれば，r_2 は集合 $\{r\in\mathbb{R}_+\mid b^*\geqq\Omega\phi_*\bar{l}_*r\}$ の上界であり，(5.16) 式からそれは H の上界でもある。

5.3.7. 集合 $H(y)$ の定義

ここで集合 $H(y)$ を次のように定義する。

$$H(y):=\{r\in\mathbb{R}_+\mid (B-M(y,r))z\geqq 0 \text{ となる } z\in Z \text{ が存在する}\}$$

$$=\{r\in\mathbb{R}_+\mid \exists_{z\in Z}(B-M(y,r))z\geqq 0\}$$

これは，任意の $y\in Y$ を固定したときに $\exists_{z\in Z}(B-M(y,r))z\geqq 0$ を成立させる r の集合であり，当然 H の部分集合である。すなわち

$$H(y)\subset H$$

が成り立つ。

5.3.8. $\forall_{y\in Y}\ r_1\in H(y)$ の証明

(5.9) 式の r_1 の選び方および $H(y)$ の定義より

$$\forall_{y\in Y}\ r_1\in H(y)$$

は自明である。

5.3.9. 主張「r_2 は $H(y)$ の上界である」の証明

5.3.6.節における r_2 の選び方より r_2 は H の上界であり，またすべての $y\in Y$ について $H(y)\subset H$ だから，r_2 はすべての $y\in Y$ に共通した $H(y)$ の上界である。

5.3.10. 主張「任意の $\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{Y}$ について $\max \boldsymbol{H}(\boldsymbol{y})$ が存在する」の証明

$y\in Y$ を任意に選ぶ。$H(y)$ は上に有界であるから，$H(y)$ の上限が存在する。すなわち

$r^*:=\sup H(y)$

このとき $H(y)$ の要素からなり r^* に収束する数列 $\{r_k\}$ をとることができる。この数列についてすべての $k=1,2,\cdots$ について $r_k\in H(y)$ だから，$H(y)$ の定義から，数列 $\{r_k\}$ に対応した Z の点列 $\{z_k\}$ を次のように選ぶことができる。すなわち任意の k について，

$$(B-M(y,r_k))z_k\geqq 0,\ z_k\in Z \qquad \cdots\cdots(5.17)$$

をみたすというものである。また Z はコンパクトだから点列 $\{z_k\}$ は収束する部分列を含み，その極限値 z_0 は Z に属する。この収束する部分列を改めて $\{z_k\}$ と書けば

$$\lim_{k\to\infty} z_k=z_0\in Z$$

となる。この部分列 $\{z_k\}$ の新たなインデックスに対応した $\{r_k\}$ の部分列も改めて $\{r_k\}$ と書いておく。もちろんこれらの部分列 $\{r_k\}$ および $\{z_k\}$ にかんしても（5.17）式が成り立つ。(5.7) から明らかなように $m_{ij}(y,r)$ は連続関数だから

$$\lim_{k\to\infty}(B-M(y,r_k))z_k=(B-M(y,r^*))z_0\geqq 0$$

が成り立つ。よって $H(y)$ の定義から $r^*\in H(y)$ であり，$r^*=\max H(y)$ である。このとき，5.3.8節の考察より $r_1\in H(y)$ であり，5.3.9節の考察より r_2 は $H(y)$ の上界だから，$r^*\in[r_1,\ r_2]$ である。$y\in Y$ を任意に選んだのだから，すべての y についてそれぞれの $\max H(y)$ が存在し，それは区間 $[r_1,\ r_2]$ にある。

5.3.11. $\underset{y\in Y}{\forall}\ \underset{r\in[r_1,r_2]}{\exists}\ \underset{\psi\in Y}{\exists}\ \underset{z\in Z}{\exists}(B-M(y,r))z\geqq 0\wedge\psi(B-M(y,r))\leqq 0$ の証明

$y^*\in Y$を任意に選ぶ。$r^*:=\max H(y^*)$ と定義する。もちろん $r^*\in[r_1,\ r_2]$ である。いまタッカーの定理[2)]より次の①～⑥を同時に満たす行ベクトル $\psi^*\in Y$および列ベクトル $z^*\in Z$が存在する。

① $(B-M(y^*,r^*))z^*\geqq 0$

② $z^*\geqq 0$

③ $\psi^*(B-M(y^*,r^*))\leqq 0$

④ $\psi^*\geqq 0$

⑤ $z^{*\prime}-\psi^*(B-M(y^*,r^*))>0$ [3)]

⑥ $\psi^{*\prime}+(B-M(y^*,r^*))z^*>0$

そこで次に $z^*\geq 0$ であることを示す。$r^*\in H(y^*)$ だから $H(y)$ の定義により

$(B-M(y^*,r^*))z_0\geqq 0$

となる $z_0\in Z$が存在する。この不等式に左から $\psi^*(\geqq 0)$ をかけると

$$\psi^*(B-M(y^*,r^*))z_0\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(5.18)$$

となる。一方③式に右から $z_0(\geqq 0)$ をかけると

$$\psi^*(B-M(y^*,r^*))z_0\leqq 0 \qquad \cdots\cdots(5.19)$$

となるが，(5.18)(5.19) 式より

$$\psi^*(B-M(y^*,r^*))z_0=0 \qquad \cdots\cdots(5.20)$$

である。⑤式に右から z_0 をかけると $z_0\geq 0$ より

$z^{*\prime}z_0-\psi^*(B-M(y^*,r^*))z_0>0$

となるが，(5.20) 式より

2) Tucker, A.W. [1956], Dual Systems of Homogeneous Linear Relations", in: Kuhn/Tucker (eds), *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton Univ. Press, p.11, Theorem 3.

3) 本稿での表記法に従い，ベクトルおよび行列へのアポストロフィーは転置を表す。

$z^{*\prime}z_0>0$

となる。$z^*\geqq 0$ および $z_0\geq 0$ だから $z^*\geq 0$ でなければならない。この z^* を，成分和が1となるように正規化したベクトルを改めて z^* と書けば $z^*\in Z$ が成り立つ。

次に $\psi^*\geq 0$ を示すために，逆を仮定してみる。つまり $\psi^*=0$ であると仮定する。そうすれば⑥より $(B-M(y^*,r^*))z^*>0$ となる。よって，(5.7) から明らかなように $m_{ij}(y,r)$ は連続関数だから十分に小さな $\varepsilon>0$ を選んで

$(B-M(y^*,r^*+\varepsilon))z^*>0$

とすることができる。こうして $H(y)$ の定義により $r^*+\varepsilon\in H(y^*)$ となるが，このことは $r^*=\max H(y^*)$ と矛盾する。この矛盾は $\psi^*=0$ と仮定したことによって生じたのであるから，$\psi^*\geq 0$ でなければならない。なおこの ψ^* を，成分和が1となるように正規化したベクトルを改めて ψ^* と書けば $\psi^*\in Y$ が成り立つ。

本節の考察によって明らかになったことは，任意の $y\in Y$ について

$(B-M(y,r))z\geqq 0$ ……(5.21)

$\psi(B-M(y,r))\leqq 0$ ……(5.22)

を同時に満たすような $\psi\in Y$，$z\in Z$ および $r\in[r_1, r_2]$ が存在するということである。

5.3.12. 対応Ψの定義

そこで集合 $\Psi(y)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\Psi(y):=&\{\psi\in Y \mid (5.21) と (5.22) を同時に満たす\\ &\quad z\in Z および r\in[r_1, r_2] が存在する\}\\ =&\{\psi\in Y \mid \underset{r\in[r_1,r_2]}{\exists}\ \underset{z\in Z}{\exists}\ (B-M(y,r))z\geqq 0\wedge\psi(B-M(y,r))\leqq 0\}\end{aligned}$$

……(5.23)

前節の考察から明らかなように任意の $y\in Y$ について $\Psi(y)$ は少なくとも一

つの要素をもつ。この集合を基礎にして対応Ψを次のように定義する。

$\Psi : Y \rightarrow Y,\ y \mapsto \Psi(y)$

5.3.13. 主張「任意の $y \in Y$ について $\Psi(y)$ は凸集合である」の証明

$y^* \in Y$ を任意に選ぶ。$\Psi(y^*)$ から二つのベクトル ψ_1, ψ_2 を任意に選ぶ。$\lambda \in [0,1]$ を任意に選ぶ。$\psi_0 := \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2$ と定義する。

ψ_1, $\psi_2 \in \Psi(y^*) \subset Y$ であり，Y は凸集合だから $\psi_0 \in Y$ である。ところで $\psi_1 \in \Psi(y^*)$ だからある $z_1 \in Z$ とある $r^{(1)} \in [r_1,\ r_2]$ を適当に選べば

$$(B - M(y^*, r^{(1)}))z_1 \geqq 0 \quad \cdots\cdots(5.24)$$

$$\psi_1(B - M(y^*, r^{(1)})) \leqq 0 \quad \cdots\cdots(5.25)$$

が同時に成り立つ。同様に $\psi_2 \in \Psi(y^*)$ だからある $z_2 \in Z$ とある $r^{(2)} \in [r_1,\ r_2]$ を適当に選べば

$$(B - M(y^*, r^{(2)}))z_2 \geqq 0 \quad \cdots\cdots(5.26)$$

$$\psi_2(B - M(y^*, r^{(2)})) \leqq 0 \quad \cdots\cdots(5.27)$$

が同時に成り立つ。いま一般性を失うことなく $r^{(1)} \geqq r^{(2)}$ とする。すると（5.7）から明らかなように $M(y^*, r^{(1)}) \geqq M(y^*, r^{(2)})$ となるから，（5.27）式より

$$\psi_2(B - M(y^*, r^{(1)})) \leqq \psi_2(B - M(y^*, r^{(2)})) \leqq 0 \quad \cdots\cdots(5.28)$$

となる。(5.25)(5.28) より

$$\psi_0(B - M(y^*, r^{(1)})) = \lambda\psi_1(B - M(y^*, r^{(1)})) + (1-\lambda)\psi_2(B - M(y^*, r^{(1)})) \leqq 0 \quad \cdots\cdots(5.29)$$

が成り立つ。さらに（5.24）式と（5.29）式を合わせて考慮すれば，$\psi_0 \in Y$, $z_1 \in Z$, $r^{(1)} \in [r_1,\ r_2]$ について（5.21）と（5.22）が同時に成り立つから，$\psi_0 \in \Psi(y^*)$ である。ψ_1, $\psi_2 \in \Psi(y^*)$ および $\lambda \in [0,1]$ は任意に選ばれたのであるから，$\Psi(y^*)$ は凸集合である。また $y^* \in Y$ は任意に選ばれたのだから，すべての $y \in Y$ について $\Psi(y)$ は凸集合である。

5.3.14. 主張「任意の $y \in Y$ について $\Psi(y)$ は閉集合である」の証明

$y^* \in Y$ を任意に選ぶ。そして $\Psi(y^*)$ の点からなる収束する点列 $\{\psi_k\}$ を任意に選ぶ。$\Psi(y^*) \subset Y$ であり，Y はコンパクトだから，

$$\lim_{k \to \infty} \psi_k =: \psi_0 \in Y$$

が成り立つ。すべての $k=1,2,\cdots$ について $\psi_k \in \Psi(y^*)$ だから点列 $\{\psi_k\}$ に対応する数列 $\{r_k\}$ と点列 $\{z_k\}$ を次のように選ぶことができる。すなわち任意の k について

$$r_k \in [r_1,\ r_2]$$

$$z_k \in Z$$

$$(B - M(y^*, r_k))z_k \geqq 0$$

$$\psi_k(B - M(y^*, r_k)) \leqq 0$$

というものである。また区間 $[r_1,\ r_2]$ はコンパクトだから点列 $\{r_k\}$ は収束する部分列を含み，その極限値 r_0 は区間 $[r_1,\ r_2]$ に属する。この収束する部分列を $\{r_{k_\nu}\}$ と書けば

$$\lim_{\nu \to \infty} r_{k_\nu} = r_0 \in [r_1,\ r_2]$$

となる。この部分列 $\{r_{k_\nu}\}$ の新たなインデックスに対応した $\{z_k\}$ の部分列を $\{z_{k_\nu}\}$ と書く。このときすべての ν について $z_{k_\nu} \in Z$ であり，Z はコンパクトだから点列 $\{z_{k_\nu}\}$ は収束する部分列を含み，その極限値 z_0 は Z に属する。この収束する部分列を改めて $\{z_{k_\nu}\}$ と書けば

$$\lim_{\nu \to \infty} z_{k_\nu} = z_0 \in Z$$

となる。この部分列 $\{z_{k_\nu}\}$ の新たなインデックスに対応した $\{\psi_k\}$ および $\{r_{k_\nu}\}$ の部分列も改めて $\{\psi_{k_\nu}\}$，$\{r_{k_\nu}\}$ と書いておく。もちろんこれらの部分列 $\{\psi_{k_\nu}\}$，$\{r_{k_\nu}\}$，$\{z_{k_\nu}\}$ にかんしてもすべての ν について（5.21）と（5.22）式が成り立つ。よって $m_{ij}(y,r)$ は連続関数だから

$$\lim_{\nu\to\infty}(B-M(y^*,r_{k_\nu}))z_{k_\nu}=(B-M(y^*,r_0))z_0\geqq 0$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\psi_{k_\nu}(B-M(y^*,r_{k_\nu}))=\psi_0(B-M(y^*,r_0))\leqq 0$$

が成り立つ。こうして $\psi_0\in Y$, $r_0\in[r_1, r_2]$, $z_0\in Z$ についても（5.21）と（5.22）式が成り立つことになるので，よって $\Psi(y)$ の定義から $\psi_0\in\Psi(y^*)$ である。なお点列 $\{\psi_k\}$ は任意に選ばれたのであるから，$\Psi(y^*)$ の点からなる収束する点列はすべて $\Psi(y^*)$ に属する極限値を持つ。よって $\Psi(y^*)$ は閉集合である。また $y^*\in Y$ も任意に選ばれたのであるから，すべての $y\in Y$ について $\Psi(y)$ は閉集合である。

5.3.15. 主張「対応 Ψ は Y において優半連続である」の証明

対応 Ψ が優半連続であることを示すためには，Y がコンパクトだから，Ψ が Y において閉対応であることを示せばよい。そこで $y_0\in Y$ を任意に選ぶ。y_0 に収束する Y の点列 $\{y_k\}$ を任意に選ぶ。すなわち

$$\lim_{k\to\infty}y_k=y_0\in Y,\ y_k\in Y,\quad k=1,2,\cdots \qquad\cdots\cdots(5.30)$$

である。さらに

$$\psi_k\in\Psi(y_k),\qquad k=1,2,\cdots \qquad\cdots\cdots(5.31)$$

を満たす点列 $\{\psi_k\}$ を任意に選ぶ。いま示したいのは，点列 $\{\psi_k\}$ が Y の中へ収束するときその極限値が $\Psi(y_0)$ に属するということである。すなわち

$$\lim_{k\to\infty}\psi_k=:\psi_0\in Y \ \Rightarrow\ \psi_0\in\Psi(y_0)$$

を示したいのである。

そこで点列 $\{\psi_k\}$ が $\psi_0\in Y$ に収束すると仮定する。この点列についてすべての k について $\psi_k\in\Psi(y_k)$ だから，$\Psi(y)$ の定義より，$\{\psi_k\}$ に対応した数列 $\{r_k\}$ と点列 $\{z_k\}$ を次のように選ぶことができる。すなわち任意の k について

$r_k \in [r_1,\ r_2]$

$z_k \in Z$

$(B-M(y_k,r_k))z_k \geqq 0$

$\psi_k(B-M(y_k,r_k)) \leqq 0$

というものである。また区間 $[r_1,\ r_2]$ はコンパクトだから点列 $\{r_k\}$ は収束する部分列を含み，その極限値 r_0 は区間 $[r_1,\ r_2]$ に属する。この収束する部分列を $\{r_{k_\nu}\}$ と書けば

$$\lim_{\nu\to\infty} r_{k_\nu} = r_0 \in [r_1,\ r_2]$$

となる。この部分列 $\{r_{k_\nu}\}$ の新たなインデックスに対応した $\{z_k\}$ の部分列を $\{z_{k_\nu}\}$ と書く。このときすべての ν について $z_{k_\nu} \in Z$ であり，Z はコンパクトだから点列 $\{z_{k_\nu}\}$ は収束する部分列を含み，その極限値 z_0 は Z に属する。この収束する部分列を改めて $\{z_{k_\nu}\}$ と書けば

$$\lim_{\nu\to\infty} z_{k_\nu} = z_0 \in Z$$

となる。この部分列 $\{z_{k_\nu}\}$ の新たなインデックスに対応した $\{\psi_k\}$ $\{r_{k_\nu}\}$ および $\{y_k\}$ の部分列も改めて $\{\psi_{k_\nu}\}$，$\{r_{k_\nu}\}$，$\{y_{k_\nu}\}$ と書いておく。もちろんこれらの部分列 $\{y_{k_\nu}\}$，$\{\psi_{k_\nu}\}$，$\{r_{k_\nu}\}$，$\{z_{k_\nu}\}$ にかんしてもすべての ν について（5.21）と（5.22）式が成り立つ。ここで，$m_{ij}(y,r)$ は連続関数だから

$$\lim_{\nu\to\infty}(B-M(y_{k_\nu},r_{k_\nu}))z_{k_\nu} = (B-M(y_0,r_0))z_0 \geqq 0$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\psi_{k_\nu}(B-M(y_{k_\nu},r_{k_\nu})) = \psi_0(B-M(y_0,r_0)) \leqq 0$$

が成り立つ。こうして $y_0 \in Y$，$\psi_0 \in Y$，$r_0 \in [r_1,\ r_2]$，$z_0 \in Z$ についても（5.21）と（5.22）式が成り立つことになるので，$\Psi(y)$ の定義から $\psi_0 \in \Psi(y_0)$ である。よって Ψ は y_0 について閉じている。また $y_0 \in Y$ も任意に選ばれたのであるから，Y について Ψ は閉対応である。

5.3.16. $\exists_{y \in Y}\ y \in \Psi(y)$ の証明

集合 Y はコンパクトな凸集合である。

対応 $\Psi : Y \to Y,\ y \mapsto \Psi(y)$ は Y において優半連続である。

任意の $y \in Y$ について $\Psi(y)$ は閉凸集合である。

よって角谷の不動点定理より

$$\hat{y} \in \Psi(\hat{y}),\ \hat{y} \in Y \qquad \cdots\cdots(5.32)$$

を満たす $\hat{y}$ が存在する。

5.3.17. 均衡解の存在の証明

(5.32) をみたす $\hat{y}$ を選ぶ。この $\hat{y}$ について $\hat{y} \in \Psi(\hat{y})$ だから

$$(B-M(\hat{y},\hat{r}))\hat{z} \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(5.33)$$

$$\hat{y}(B-M(\hat{y},\hat{r})) \leqq 0 \qquad \cdots\cdots(5.34)$$

を同時に満たす $\hat{r} \in [r_1,\ r_2]$ および $\hat{z} \in Z$ が存在する。ここで5.3.3節における需要行列 $M(y,r)$ の定義（(5.6) 式）および (5.34) 式から，

$$\hat{y}B \leqq \hat{y}M(\hat{y},\hat{r}) = \hat{y}A + \Omega L + \hat{y}\Delta A(\hat{r}) + \Omega\,\Delta L(\hat{r})$$
$$= \hat{y}\widetilde{A}(\hat{r}) + \Omega \widetilde{L}(\hat{r})$$

が得られる。よって $\hat{y}$ および $\hat{r}$ は，5.2.2節の均衡条件1)’ を満たす。

さらに (5.33) 式は明らかに

$$B\hat{z} \geqq \{A + \Omega f(\hat{y})L + \phi(\hat{y})(\hat{y}\Delta A(\hat{r}) + \Omega\,\Delta L(\hat{r}))\}\hat{z}$$

となるから，$\hat{y}$，$\hat{z}$，および $\hat{r}$ は均衡条件2)’ を満たす。

次に (5.33) 式に左から $\hat{y}$ をかけ，(5.34) 式に右から $\hat{z}$ をかけると

$$\hat{y}(B-M(\hat{y},\hat{r}))\hat{z} = 0 \qquad \cdots\cdots(5.35)$$

が得られる。5.3.3節 (5.6) 式の $M(y,r)$ の定義より

$$M(\hat{y},\hat{r}) \geqq \Omega f(\hat{y})L$$

は明らかだが，仮定④⑤より $L>0$ かつ $\Omega>0$ であり，$\hat{y}f(\hat{y})=1$ だから，(5.35)

式より

$$\hat{y}B\hat{z}=\hat{y}M(\hat{y},\hat{r})\hat{z}\geqq\Omega L\hat{z}>0$$

が成り立つ。よって$\hat{y}$，$\hat{z}$は均衡条件の5)’を満たす。

最後に$\hat{r}\in[r_1, r_2]$であり，5.3.5節の考察（(5.9) 式）により$r_1>0$であったから，$\hat{r}>0$である。よって$\hat{r}$は均衡条件8）を満たす。以上の一連の考察により，このように選ばれた$\hat{y}$，$\hat{z}$および$\hat{r}$は均衡条件1)’ 2)’ 5)’ 8）を同時に満たす。よって5.2.3節で確認した通り，こうした解は1)’～7)’ 8）をすべて同時に満たす均衡解である。これで5.3.2節の命題は証明された（*qed*)。

ちなみにこの均衡において実際に操業される部門j全体の平均マークアップ率$\hat{q}_j$は

$$\hat{q}_j=\frac{\sum_{h=1}^{m}\hat{y}_h\frac{\hat{r}}{U_{hj}}a_{hj}+\Omega\frac{\hat{r}}{U_{lj}}l_j}{\sum_{h=1}^{m}\hat{y}_h a_{hj}+\Omega l_j}$$

となる。