

ロジスティック曲線を導入したソローモデルの考察

宇 野 真 人

Keyword：ソローモデル，ロジスティック曲線，人口成長率

はじめに

人口成長率は経済成長率を決める重要なファクターである。経済成長理論においても技術進歩と並んで経済成長率を決めるため人口成長率の動きは注目に値する¹⁾。さらにこれにより国内の労働供給量も左右される。

まず日本の人口成長の軌跡を追ってみると次のようになっている。

江戸時代（1847）から明治初め（1870）までの推定人口をみてみるとおおよそ3千万人前半で微増していることが図1より観察される。

これに対して1872年以降の人口増加の度合いを図2より観察するとかなりのスピードで増加していることが読み取れる²⁾。

1) 労働を技術で代替させるということが可能であるため、技術の活用が活発に行われれば人口減少が経済成長に与える負の効果を打ち消すことができるという主張がAcemoglu and Restrepo（2017）によってなされている。

2) 人口増加の1つの要因として大塚（2018）によると現実の人口政策は出産・医療・移民等に関してであり、医療面ではその充実を図る政策が採られていた。

図1 江戸時代の推定人口：1847～70年

(1,000人)

年次	人口	年次	人口	年次	人口
1847(弘化4)	30,195	1855(安政2)	31,599	1863(文久3)	33,070
1848(嘉永1)	30,367	1856(3)	31,780	1864(元治1)	33,259
1849(2)	30,540	1857(4)	31,961	1865(慶應1)	33,448
1850(3)	30,714	1858(5)	32,143	1866(2)	33,639
1851(4)	30,890	1859(6)	32,327	1867(3)	33,831
1852(5)	31,066	1860(萬延1)	32,511	1868(明治1)	34,024
1853(6)	31,243	1861(文久1)	32,696	1869(2)	34,218
1854(安政1)	31,421	1862(2)	32,883	1870(3)	34,413

出典：国立社会保障・人口問題研究所ホームページ (<https://www.ipss.go.jp/>)

図1以前の人口規模もおおよそ3千万前後で推移していたことが分かっているが、それが図2にみられるように明治以降急激な人口増加を迎えたことになる。

人口成長率は伸びる特徴を示すが、それには大きな特徴があると言われている。人口波動と呼ばれる特徴である。それは次のような内容である。

人口増加は人口容量に規定される。動物は人口容量を決定できないが、「人間の場合は、自然環境にさまざまに手を加えて、人口容量を増減できる能力を持っている。石器の発明によって狩猟技術を高めたり、科学技術の発明によって工業技術を高めたりすることができる。とすれば、人口容量とは、自然環境とそれに加えられた文明によって決定されることになる。これを数式で表せば[人口容量 = 自然環境 × 文明]ということになる。」(古田 (1996) p. 6 より)

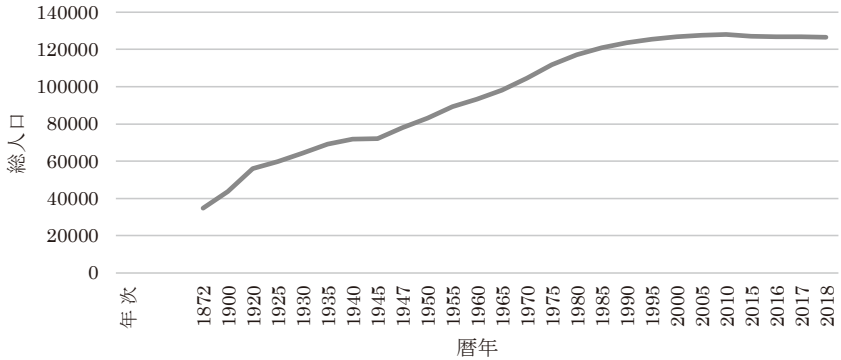


図2 総人口推移 (1872-2018)

出典：国立社会保障・人口問題研究所ホームページ (<https://www.ipss.go.jp/>)

人口成長率はこの自然環境と文明の進歩による人口容量の拡大によって起きるということである。人口容量の拡大がない場合、人口成長率は1838年にヴェアフルストの提唱した図3で示すロジスティック曲線のようになるということになる。

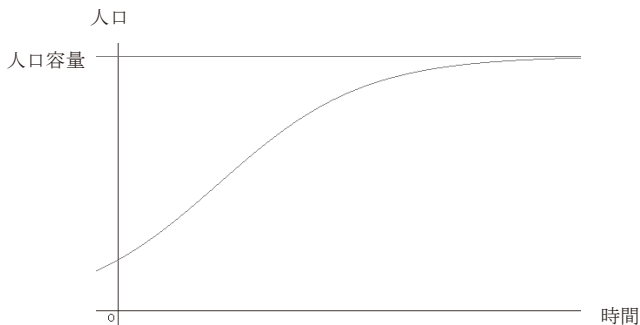


図3 ロジスティック曲線の形状

図3で見られる通り時間経過とともに人口は成長していくがいずれ人口容量に突き当たることになる。しかし、現実の長期的な趨勢をみれば人口は成長し

(4) ロジスティック曲線を導入したソローモデルの考察

ておりある上限で頭打ちになることはない。

その理由として古田（1996）によれば人口容量は各種技術進歩などにより押し上げられたため人口は成長してきたということである。古田によれば人口の伸びは次に示されるようなロジスティック曲線をいくつも重ねたような形（図4参照）になるという。

人口容量まで人口が成長すると技術革新などにより人口容量が伸びそれによって人口が成長していく。その仮定は図4のように示すことができる。

人口は人口容量Ⅰ→人口容量Ⅱ→人口容量Ⅲと人口容量が成長していくのに沿って規模を拡大していく。

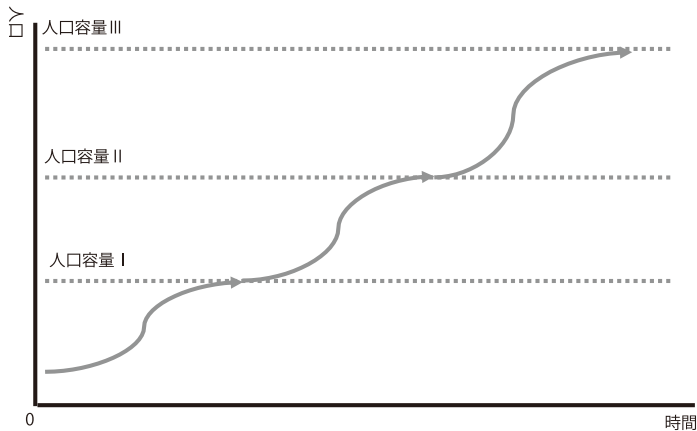


図4 人口容量の動きと人口

出典：古田（1996）の図を基に作成

以上のようなことから人口成長が技術革新や投資の成長など内生的要因で変動すると仮定して経済成長モデルを構築していきたい。

本稿ではまず人口成長に関しての理論としてマルサスの成長理論、ヴェアフルストの成長理論を示し、それらの現実適合性を考察する。

その後、ソローが1956年に提起した人口成長率を外生的にとらえた新古典派

成長モデル（ソローモデル）へヴェアフルストの示したロジスティック曲線を導入し³⁾、人口容量が変動する仮定を置いた場合どのようにモデルが変化するかを考察していく。

1 人口成長理論と現実適応性

マルサス型の人口成長理論と人口成長には人口容量に応じた壁があるとしたヴェアフルスト型の人口成長理論の紹介を行う。その後、ソロー型の新古典派経済成長理論にヴェアフルストモデルを適用した考察を行い、人口成長率の伸びる要因を探っていきたい。

1-1 マルサスの人口成長理論と現実適応性

マルサスの人口成長理論は次の3つの命題から成り立っている。

- 1) 人口は必ず生存資料によって制限される。
- 2) 人口は、有力かつ顕著な妨げによって阻止されない限り生存資料の増すところでは常に増加する。
- 3) 人口成長の妨げは道徳的抑制、悪徳および窮困に帰着する。

生存資料を人口が上回るか下回るかによって人口の増減が決まる。よって人口の成長は生存資料が獲得できるかどうかにかかっているといえる。

そして妨げのない限りマルサス型の人口成長率は次の通り定義される。

$$N=N_0e^{nt}$$

N は人口規模、 N_0 は初期人口、 n は一定値の人口成長率を表す。

この人口成長率を表す式において人口は一定値 n で常に成長していく結果になる。

3) ロジスティック曲線を導入した先行研究としてRitelli, Mingari Scarpello, & Brida(2008)があるが、人口容量の内生化は行っていないため、本稿とは分析目標が異なる。

(6) ロジスティック曲線を導入したソローモデルの考察

しかし、人口成長の現実をみとめると長期的には成り立たないことがわかる。それは図4をみると明らかである。図5のマルサス型は $N_0 = 3.9 \times 10^6$, $n = 0.304$ として計算した結果である。この図をみると1850年以降実際の米の人口の乖離が目立ち始めていることがわかる。実際の経済においては人口成長率が無限に一定率で成長していくことは非現実的であるということを示している。

図5 マルサス型人口成長予測と米の人口 ($\times 10^6$)

西暦	マルサス型	米の人口
1820	9.80	9.6
1830	13.32	12.9
1840	18.10	17.1
1850	24.61	23.2
1860	33.45	31.4
1870	45.47	38.6
1880	61.80	50.2
1890	84.01	62.9
1900	114.20	76.0
1910	155.24	92.0
1920	211.02	106.5
1930	286.85	123.2

出典：バージェス・ボリー (1990)

1-2 ヴェアフルストの人口成長理論と現実適応性

これに対して1838年にヴェアフルストは人口成長に上限を設定したモデルを提示した⁴⁾。

このモデルはロジスティック曲線と呼ばれ初期に人口は成長していくが設定

4) 原型がVerhulst (1838) において提示された。

された人口上限に近くなると成長が鈍化しいずれ成長がとまるというモデルである。その具体的な形状は図3で示したとおりである。

人口容量（人口上限・環境許容量）を C とすると、そのロジスティック曲線は次のように示されている。

$$\frac{\dot{N}}{N} = l \left(\frac{C-N}{C} \right) \quad (1)$$

実際に微分方程式を次のように積分の形にしていく。

$$\begin{aligned} \left(\frac{C}{N(C-N)} \right) dN &= l dt \\ \left(\frac{1}{C-N} + \frac{1}{N} \right) dN &= l dt \\ \int \left(\frac{1}{C-N} + \frac{1}{N} \right) dN &= \int l dt \end{aligned}$$

この不定積分を次のように解く。

$$N = \frac{C}{1 + e^{-(l+D)t}} = \frac{C}{1 + e^{-lt} (C/N_0 - 1)} \quad (2)$$

D は積分定数とする。

(2)式は C が不変であるとするとき時間 t を無限大にすると $N=C$ となることを意味している。つまり、時間を通じて人口成長率 \dot{N}/N は現実の人口 N が人口容量 C に近づくとつれて小さくなり現実の人口が上限に達し $N=C$ となったとき、 $\dot{N}/N = 0$ （人口成長率ゼロ）となる。

(2)式に基づいて1830年～1930年のアメリカの人口の推計を行った結果、実際の人口の伸びとほぼ一致するという結果を得た。それはバージェス・ボリー(1990)に掲載されていた表によると次の図6のようであった。

(8) ロジスティック曲線を導入したソローモデルの考察

図6 ヴェアフルストモデルと米の人口 (×10⁶)

西暦	A	米の人口
1820	9.69	9.6
1830	13.02	12.9
1840	17.38	17.1
1850	23.04	23.2
1860	30.21	31.4
1870	39.13	38.6
1880	49.88	50.2
1890	62.42	62.9
1900	76.48	76.0
1910	91.55	92.0
1920	106.95	106.5
1930	121.95	123.2

A：ヴェアフルストモデルによる推計

図6においてAのヴェアフルストモデルでは(2)式に $l=0.3134$, $C=197$, $N_0=3.9$ とし計算している。

出典：バージェス・ボリー (1990)

ヴェアフルストモデルでは1930年までほぼ米の人口成長と合致していることがわかるが、米の人口はその後も伸び続けており、そのことはヴェアフルストモデルでも説明しきれない点があることを示している。

実際の経済では成長していた人口がある時期にくると成長が鈍化し、しばらく後に再度成長を始めている。そのような人口成長率の変動がどのような理由によるものかを考えることは重要である。

先述したが、この点について古田 (1996) では、人口成長率は上限に近づくと鈍化して成長がとまるが、その後、技術革新などにより上限が伸びることで再度成長していくというロジスティック曲線を修正したモデルが提示されている。

それでは具体的にマルサス型人口成長率で構築されたソローモデルに(2)式で

定義されるロジスティック曲線を導入し人口成長率の内生化を行っていきたい。次にソロースワンモデルにロジスティック曲線を導入し人口成長率の変動理由について考察していく。

2 ソローモデルと人口成長

本節ではまずソローモデルを振り返る。その後、ソローモデルにロジスティック曲線を導入したモデルを提示し、人口容量が人口成長率より早く成長するケース、人口容量が人口成長率と同率で成長するケースを検討する。それにより人口成長率の伸びに人口容量の成長が必要であることを示していく。

2-1 ソローモデル（人口成長率が一定）

1956年のソローモデルに代表される新古典派経済成長モデルは「貯蓄＝投資」という関係をベースに貯蓄率と人口成長率と技術進歩率の3つで表現される。

具体的には次のように表される。

投資は \dot{K} で表され、資本蓄積と呼ばれる。そして投資は貯蓄に等しくなる。貯蓄を S とすると次の関係がソローモデルのベースとなる。

$$\dot{K} = S \quad (3)$$

さらに貯蓄は所得に一定率の貯蓄率を乗じたものと定義される。所得を Y 、貯蓄率を s ($0 < s < 1$) とするとき、(3)式は次のようになる。

$$\dot{K} = sY \quad (4)$$

以上から資本の成長率を定義する。

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sY}{K} \quad (5)$$

次に生産関数を $Y = K^\beta (AN)^{1-\beta}$ 、効率単位ではかった1人当たり資本を $k_A = K/AN$ と定義すると、 $Y/K = k_A^{\beta-1}$ と書くことが出来、(5)式は次のように k_A を用いて表すことが出来る。

(10) ロジスティック曲線を導入したソローモデルの考察

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sK^\beta (AN)^{1-\beta}}{K} = sk_A^{\beta-1} \quad (6)$$

効率単位ではかった1人当たり資本 k_A と K の関係は

$$\frac{\dot{k}_A}{k_A} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{N}}{N} \quad (7)$$

となるから、技術進歩率 $\dot{A}/A = g$ 、人口成長率 $\dot{N}/N = n$ と定義し(7)式も使い置き換えると、上式は次のように書きかえられる。

$$\frac{\dot{k}_A}{k_A} = sk_A^{\beta-1} - (g+n) \quad (8)$$

(8)式は微分方程式になっており、その k_A の微分が負であることから定常状態が安定的であることが分かる。

定常状態を k_A^* とすると定常状態における効率単位ではかった資本は次のように表される。

$$k_A^* = \left\{ \frac{s}{g+n} \right\}^{\frac{1}{1-\beta}} \quad (9)$$

さらに定常状態における経済成長率と1人当たり資本の成長率を求めると次の通り。

$$\frac{\dot{K}}{K} = g+n \quad (10)$$

1人当たり資本の成長率は次の通り。

$$\frac{\dot{k}}{k} = g \quad (11)$$

ソローモデルにおける人口成長率は $\dot{N}/N = n$ は一定と仮定され、人口はマルサス的な成長をみせていた。実際には人口規模は成長期と停滞期に分かれると考えられ、何らかの成長要因があるはずである。

2-2 ソローモデルへのロジスティック曲線の導入

ソローモデルの人口成長率はパラメータとして扱われていたが、ここではロジスティック曲線を導入して変数として扱う。人口規模が停滞期を挟むものの成長してきたことをロジスティック曲線で考えたとき、次の2つの仮定のどちらかが必要となる。

1つ目の仮定：人口容量 C が人口成長率より早く成長する。

((1)式の右辺 N/C がゼロ)

2つ目の仮定：(1)式を書き換えた(12)式の N/C が一定で推移する

$$\frac{\dot{N}}{N} = l \left(1 - \frac{N}{C} \right) \quad (12)$$

つまり式の右辺の N/C がゼロになるか、あるいは定常状態において一定で推移する仮定が必要になる。

1つ目の仮定では N/C がゼロになる。人口成長率より C の成長がより速い状態になり、結果、人口容量は人口成長率を一切妨げないため人口成長率は最大の成長率 l で成長することになる。

次に2つ目の仮定である定常状態において N/C が一定で推移する場合を考える。この場合、人口成長率は常に最大限の成長率 l で成長するわけではなく人口容量 C が伸びる速度で人口成長率が推移するということになる。つまり人口成長率は人口容量の制約を受けて成長する。

そこで、まず最初に N/C が一定で推移するケースを考察していく。このケースではまず外生的に人口容量 C の成長率が与えられている状態を分析し、その後、古田 (1996) が示したように人口容量 C が経済活動の影響を受けて内生的に成長するとの仮定を置き分析していく。

2-3 定常状態で N/C が一定で推移するケース

N/C が一定ということは、人口成長率 $=C$ の成長率となる。 C の成長率を $q(=\dot{C}/C)$ とおくと、 $n=q$ である。これは人口成長率が人口容量とともに成長し、人口容量が伸び悩めば人口成長率も伸び悩むことを意味する。

$x = N/C$ とし、(12)式を次のように書き換える。

$$\frac{\dot{N}}{N} = l(1-x) \quad (13)$$

定常状態において一定であるなら、定常状態の x^* は $q = l(1-x^*)$ より $x^* = (l-q)/l$ となる。そして $n < l$ である。

定常状態の資本蓄積は(6)式の $\dot{N}/N = n$ が $n = q$ となることにより $sk_A^{*\beta-1} - (g+q) = 0$ となるから、定常状態の効率単位の一人当たり資本 k_A^* は次のように表される。

$$k_A^* = \left\{ \frac{s}{g+q} \right\}^{\frac{1}{1-\beta}} \quad (14)$$

(14)式は人口成長率が人口容量の成長率に置き換わった以外は基本的に(9)式と同じである。人口は人口容量の成長に伴って成長する。ロジスティック曲線の考え方によれば人口容量が不変な場合は(12)式より時間を無限にとると人口はいずれ $N = C$ になった時点で人口成長は止まってしまうが、現実経済では人口容量の増大により人口成長が伸び続けている。社会が医療など様々な分野に投資していくことで人口上限を引き上げてきた現実があり、人口容量が伸びることで人口成長が続くことを示す $n = q$ という関係性が導入されたことは経済成長や人口成長率を考えるうえで重要であると思われる。

定常状態の安定性

この場合の経済は k_A と x の微分方程式で動学を示すことができる。

(8)式より、 k_A の方程式は次のようになる。

(13)

$$\frac{\dot{k}_A}{k_A} = sk_A^{\beta-1} - g - \frac{\dot{N}}{N} = sk_A^{\beta-1} - g - l(1-x) \quad (15)$$

x の方程式は $x = N/C$ の対数を取り時間で微分することにより次の式で示される。

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{C}}{C} = l(1-x) - q \quad (16)$$

(15), (16)式の定常状態の近傍でテイラー展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{k}_A &= \left[\beta sk_A^{*\beta-1} - \{g + l(1-x^*)\} \right] (k_A - k_A^*) + lk_A^*(x - x^*) \\ &= (\beta - 1)sk_A^{*\beta-1}(k_A - k_A^*) + lk_A^*(x - x^*) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\dot{x} = -lx^*(x - x^*) \quad (18)$$

(17)式の $(\beta - 1)sk_A^{*\beta-1} < 0$, (18)式の $-lx^* < 0$ より定常状態へ向かう経路は存在することがわかる。

2-4 人口容量 C が内生的に成長するケース

前節では人口容量 C が一定で成長し、その成長率の大きさに人口成長率が規定されると考えた。そこで本節では人口容量 C の成長要因を考えていく。それによって人口成長率が鈍化する要因と再度成長しだす要因を考えていきたい。

人口容量 C の拡大要因

古田(1996)によれば先に述べたように人口容量 C は「人口容量 = 自然環境 × 文明」と定義され、人口増加の歴史を観察したときに人工的に拡大させてきたと思われる。医療の進歩、居住環境の整備など投資の拡大に伴って拡大してきたのではないだろうか。

以上のことから自然環境や文明が資本 K の拡大に伴って増進されてきたと考え、人口容量 C が増えるメカニズムを、次のような仮定を置いてみよう。

(14) ロジスティック曲線を導入したソローモデルの考察

$$C = \eta K^\alpha \quad (19)$$

η は正の定数, $\alpha < 1$ とする。

投資による資本ストック増加が人口上限を引き上げる要因となる。

これを考慮したとき(2)式は次のように書き変えることが出来る。

$$\frac{\dot{N}}{N} = l \left(1 - \frac{N}{\eta K^\alpha} \right) \quad (20)$$

定常状態の導出

「定常状態で N/C が一定で推移するケース」での分析と同様に効率単位の一
人当たり資本 k_A と x の2変数の微分方程式を導き, そこから定常状態と安定性
の考察を行っていく。

まず $N/\eta K^\alpha = x$ とにおいて(4)式を書き直すと次のようになる。

$$\frac{\dot{N}}{N} = l(1-x) \quad (21)$$

(19)式の $C = \eta K^\alpha$ の対数を取り時間で微分した式は次のとおりである。

$$\frac{\dot{C}}{C} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} \quad (22)$$

資本 K の拡大に伴って C が増える仮定により(16)式の q が(22)式に置き換わる。

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{C}}{C} = l(1-x) - \alpha \frac{\dot{K}}{K} \quad (23)$$

(4)式を(23)式に入れて x の微分方程式を導くことができる。

$$\frac{\dot{x}}{x} = l(1-x) - \alpha s k_A^{\beta-1} \quad (24)$$

k_A の微分方程式は(15)式と同様である。

定常状態は $\dot{k}_A/k_A = \dot{x}/x = 0$ のときである。定常状態の k_A と x を, それぞれ
 k_A^{**} , x^{**} とすると, (15), (24)式から次のように導くことができる。

(15)

$$k_A^{**} = \left\{ \frac{(1-\alpha)s}{g} \right\}^{\frac{1}{1-\beta}} \quad (25)$$

$$x^{**} = 1 - \frac{\alpha g}{l(1-\alpha)} \quad (26)$$

定常状態における経済成長率と人口成長率は次のとおりである。

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{g}{1-\alpha} \quad (27)$$

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{\alpha g}{1-\alpha} \quad (28)$$

定常状態の考察

(25)~(28)式についての考察は次のとおりである。

g と α の上昇は経済成長率を押し上げる。 α の上昇は N/C を下げることで人口成長率を高めることを示すので、技術進歩率と人口成長率によって成長が決まるソローモデルと基本的に同じである。

人口成長率は先述した通り α の上昇と技術進歩率によって高められる。技術進歩率が高まると投資が活発に行われるようになり経済成長率を高め、それが N/C を低める要因となり人口成長率上昇につながると考えられる。

また $\alpha < 0$ のとき(27)式の経済成長率はプラスを維持するが、人口成長率を示す(28)式はマイナスになり、人口は減少していくことになる。これは経済成長の過程で人口容量が小さくなっていくことから発生する。現実的には経済は成長するが人口成長にプラスになるような点に投資がなされないなどの原因が考えられる。そしてこのケースでは(27)式の経済成長率もかなり小さくなるのが想定され、これも経済成長率=技術進歩+人口成長率と定義されるソローモデルの結論と同様になる。

定常状態の安定性

k_A の動学は(15)式と同じなので次のようになる。

$$\frac{\dot{k}_A}{k_A} = sk_A^{\beta-1} - g - \frac{\dot{N}}{N} = sk_A^{\beta-1} - g - l(1-x) \quad (15)$$

次に x の動学は(24)式となる。

以上の(15), (24)式で安定性を考えていく。定常状態の近傍でテイラー展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{k}_A &= \left[\beta sk_A^{**\beta-1} - \{g + l(1-x^{**})\} \right] (k_A - k_A^{**}) + lk_A^{**} (x - x^{**}) \\ &= (\beta - 1) sk_A^{**\beta-1} (k_A - k_A^{**}) + lk_A^{**} (x - x^{**}) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha (1 - \beta) k_A^{**\beta-2} (k_A - k_A^{**}) + \{l(1 - 2x^{**}) - \alpha k_A^{**\beta-1}\} (x - x^{**}) \\ &= \alpha (1 - \beta) k_A^{**\beta-2} x^{**} (k_A - k_A^{**}) - lx^{**} (x - x^{**}) \end{aligned} \quad (30)$$

線形近似した(28), (29)式において固有値を λ とすると、固有方程式は次のように表される。

$$\lambda^2 + \{lx^{**} + (1 - \beta)k_A^{**\beta-1}\} \lambda + (1 - \beta)lsk_A^{**\beta-1}x^{**}(s - \alpha) = 0$$

ここで $lx^{**} + (1 - \beta)sk_A^{**\beta-1} > 0$ であることは明確であるがデターミナントの符号は明確ではない。もし α が十分小さく $s > \alpha$ が満たされるとき(29), (30)式は安定的であると言える。

3 結果の考察

本稿では人口成長率が変動する要因を考察してきた。人口成長には人口容量という上限が存在し、その上限という名の壁が変わらなければ人口はその壁を超えることができず、いずれ成長が止まる。そのような中、人口を成長させてきたのは、その人口容量という上限を引き上げてきたからである。

その上限は自然環境の改善や文明の発展によって増進させることができ、それらは投資や技術進歩と密接に関連している。

そこでソローモデルの人口成長率にロジスティック曲線を導入し、その人口容量の上限が投資によって引き上げられる仮定をおいて内生化を行った。

結果として(27), (28)式は技術進歩が経済成長率に影響を与え、それが人口成長率にも波及することが示された。技術進歩率が人口成長率に正の関係をもつという関係は、先に述べたように技術進歩率が経済成長率を高め、その結果として人口容量を拡大した結果である。

これは例えば江戸時代終わりまでの人口がおおよそ3000万人で推移していた状況から明治時代に入り欧米の殖産興業振興と同時に出産、医療などへの投資など人口増加策が行われた結果、人口が急激に伸びていった状況を示していると言える。

本稿では外生的に与えられた技術進歩率で分析を行った。しかし、内生的成長理論では、技術進歩率は内生的に決まり、人口が減少すると技術進歩率が低下し、経済成長率を押し下げることが予想される。この点から技術進歩率の内生化を行った分析も必要であろう。

参考文献

- Acemoglu, Daron and Pascual Restrepo. (2017) Secular stagnation? The effect of aging on economic growth in the age of automation. *American Economic Review : Papers & Proceedings* 107 (5) : 174-179
- Ritelli, D., Mingari Scarpello, G., & Brida, J. G. (2008) "The Solow model with logistic manpower: a stability analysis." *Journal of World Economics Review*, 3(2), 161-166.
- Solow, R. (1956) "A contribution to the theory of economic growth." *Quarterly Journal of Economics*, 70 (February) , 65-94.
- Verhulst, Pierre-François (1838) "Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement". *Correspondance mathématique et physique* 10: 113-121.
- 大塚友美 (2018) 「明治時代の人口・経済状況—人口増加政策を可能にした要因」
日本大学文理学部人文科学研究所『研究紀要』96, 85-106
- 国立社会保障・人口問題研究所 (2020) 「人口及び人口増加率」人口統計資料集

(18) ロジスティック曲線を導入したソローモデルの考察

<https://www.ipss.go.jp/syoushika/tohkei/Popular/Popular2020.asp?chap=0>
(web参照2021-6-3)

デヴィッド・バージェス/モラゲ・ポリー著, 垣田高夫/大町久佐栄訳 (1990)

『微分方程式で数学モデルを作ろう』日本評論社

古田隆彦 (1996) 『人口波動で未来を読む』日本経済新聞社